数理解析 I テスト (2003–7–23) 解答例

河野

試験の解答が欲しいという声が多いので，この解答例を作りました。解答例はあくまでも解答例であり模範解答ではない。一般に数学に模範解答というものはない。以下の解答よりも，より明解な解答，よりエレガントな解答なども充分有り得る。

講義中にも言ったように「正解がどこかにあって，自分の解答とてらしあわせるという事ではなく，自分で正解であると理論的に納得する事が重要なの」で，解答例を丸暗記するのではなく，内容を理解するようにして下さい。

赤で書いてある部分は解答する時の注意事項です。青で書いてある部分は定義・定理等の説明です。黒の部分が解答例です。緑は一人言。

1 問いに答えならが次の不定積分を求めよ。

$$I = \int \frac{3}{x^3-1}dx$$

(1) $\dfrac{3}{x^3-1}$ を部分分数展開せよ。

(2) $J = \displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$ を $u = x + \dfrac{1}{2}$ とおいて u に関する積分に変形せよ。

(3) (2) で変形した J を $u = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan t$ とおいて t に関する積分に変形せよ。

(4) 積分 I を求めよ。

解答例： 有理関数の積分は積分計算の基本です。この計算はできるようになってください。有理関数の積分は分母の因数分解ができれば原理的には必ずできます。

(1) $\dfrac{3}{x^3-1} = \dfrac{3}{(x-1)(x^2+x+1)} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{x+2}{x^2+x+1}$ となる。

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$(分母の次数 > 分子の次数を仮定) の部分分数展開は分母が $g_1(x)g_2(x)$ と因数分解されている場合 ($g_1(x)$ と $g_2(x)$ は共通解を持たないとする) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} + \dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}$ となります。今の場合 $\dfrac{3}{x^3-1} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$ となるはずなので，両辺を比較して A, B, C を求めればよい。$\dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$ を $\dfrac{B}{x^2+x+1}$ として解答不能になっている人がいました。分母が 2 次式ですから分子は 1 次式になります。

(2) $\dfrac{du}{dx}=1$, $x^2+x+1=(x+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}$ より

$$J=\int\frac{1}{u^2+\dfrac{3}{4}}du$$

となる。

(3) $u=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan t$ とおくと，$\dfrac{du}{dt}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\cos^2 t}$, $u^2+\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{4}\left(\tan^2+1\right)=\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos^2 t}\right)=$ $\dfrac{3}{4\cos^2 t}$ なので，$J=\displaystyle\int\frac{4\cos^2 t}{3}\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2 t}dt=\frac{2}{\sqrt{3}}\int dt$ となる。

(4) $J=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\displaystyle\int dt=\frac{2}{\sqrt{3}}t=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$ となる。

$\dfrac{x+2}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{2}\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}+\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{2}\dfrac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}+\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{x^2+x+1}$

より，

$$I=\log|x-1|-\frac{1}{2}\log(x^2+x+1)-\sqrt{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

を得る。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 問いに答えならが次の不定積分を求めよ。

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}dx$$

(1) $x=\dfrac{2}{\sin t}$ とおいて I を t に関する積分に変形せよ。

(2) $u=\tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$ とおき，$\dfrac{du}{dt}$ を u を用いて表せ。

(3) $\sin t=\sin 2\left(\dfrac{t}{2}\right)$ と見て $\sin t$ を u で表せ。このとき $\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right)+\cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right)=1$ という関係を使うかもしれない。

(4) 積分 I を求めよ。

解答例： 計算ミスが目立ちました。典型的なタイプの変数変換 ($\sqrt{2}$ 次式，3 角関数の有理関数) は一通り自分で手を動かして計算しておいて下さい。自分で手を動かして実際に追計算しないと積分計算はできるようにはなりません。

(1) $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{2\cos t}{\sin^2 t}$, $x^2 - 4 = \dfrac{4}{\sin^2 t} - 4 = \dfrac{4 - 4\sin^2 t}{\sin^2 t} = \dfrac{4\cos^2 t}{\sin^2 t}$ なので

$$I = \int \frac{\sin t}{2\cos t}\left(-\frac{2\cos t}{\sin^2 t}\right)dt = -\int \frac{1}{\sin t}dt$$

を得る。今 $\dfrac{\sin t}{\cos t} > 0$ を仮定して計算しています。

(2) $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$ なので
$\dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\cos^2(t/2)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\cos^2(t/2) + \sin^2(t/2)}{\cos^2(t/2)} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \tan^2(t/2)\right) = \dfrac{1}{2}(1 + u^2)$
である。

(3) $\sin t = \sin 2\left(\dfrac{t}{2}\right) = 2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)\cos\left(\dfrac{t}{2}\right) = \dfrac{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \dfrac{2u}{1 + u^2}$

(4) $I = -\displaystyle\int \frac{1}{\sin t}dt = -\int \frac{1+u^2}{2u}\frac{2}{1+u^2}du = -\int \frac{1}{u}du = -\log|u| = -\log\left|\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right|$

3 次の不定積分を求めよ。ただし $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ は用いてよい。

$$\int 2x \arctan x dx$$

解答例：

$$\int 2x\arctan x dx = \int (x^2)'\arctan x dx = x^2\arctan x - \int x^2(\arctan x)' dx$$

であるから，$J = \displaystyle\int x^2(\arctan x)'dx = \int \frac{x^2}{1+x^2}dx$ を計算すればよい。$J = \displaystyle\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx = \int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int dx - \int \frac{1}{1+x^2}dx = x - \arctan x$
なので求める積分は，

$$x^2\arctan x - x + \arctan x$$

である。