第2回数理解析Iテスト

2003–7–23　　河野

注意: 「答」そのものは採点の対象にはしない。「答」に至る過程を採点の対象にする。したがって，答案は単に「答」を書くだけでなく,「答」に至るまでの経緯を論理的に論述する事。

答案作成は数式も含め作文であるから，主語・述語・テニヲハ・句読点等に十分注意する事。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は10桁の在籍番号を書く事。1年生は出席番号(多くは2桁)でよい。

次の3つの定理及び x^n (n は整数) の不定積分以外の定理・命題を証明なしに使用する場合は，その内容を**正確に述べた**上で適用すること。

(1) **微積分の基本定理**

(2) **置換積分法**： f は連続, $x = \varphi(t)$ は C^1 級とする。$a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ とすると次が成立する。

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

(3) **部分積分法**： f, g が C^1 級のとき次が成立する。

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

1 問いに答えならが次の不定積分を求めよ。

$$I = \int \frac{3}{x^3-1}dx$$

(1) $\dfrac{3}{x^3-1}$ を部分分数展開せよ。

(2) $J = \displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$ を $u = x + \dfrac{1}{2}$ とおいて u に関する積分に変形せよ。

(3) (2) で変形した J を $u = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan t$ とおいて t に関する積分に変形せよ。

(4) 積分 I を求めよ。

裏にも問題あり

$\boxed{\mathbf{2}}$ 問いに答えならが次の不定積分を求めよ。

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} dx$$

(1) $x = \dfrac{2}{\sin t}$ とおいて I を t に関する積分に変形せよ。
(2) $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$ とおき，$\dfrac{du}{dt}$ を u を用いて表せ。
(3) $\sin t = \sin 2\left(\dfrac{t}{2}\right)$ と見て $\sin t$ を u で表せ。このとき $\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right) + \cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right) = 1$ という関係を使うかもしれない。
(4) 積分 I を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の不定積分を求めよ。ただし $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ は用いてよい。

$$\int 2x \arctan x dx$$