数理解析IIテスト(2004–2–24)解答例

河野

試験の解答が欲しいという声が多いので，この解答例を作りました。解答例はあくまでも解答例であり模範解答ではありません。一般に数学に模範解答というものはありません。以下の解答よりも，より明解な解答，よりエレガントな解答なども充分有り得ます。

講義中にも言ったように「正解がどこかにあって，自分の解答とてらしあわせるという事ではなく，自分で正解であると理論的に納得する事が重要なの」で，解答例を丸暗記するのではなく，内容を理解するようにして下さい。

小さめのゴシック文字で書いてある部分は解答する時の注意事項または一人言等です。

注意はしていますが，解答例が間違いを含む場合もあります。発見した人は教えて下さい。

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1変数の不定積分，定積分の定義を書け。またそれらの関連に関して説明せよ。

解答例： **数学では定義をきちんと理解しておくことはとても大事です。**

与えられた関数 $y=f(x)$ に対し $\dfrac{dF(x)}{dx}=f(x)$ となる関数 $F(x)$ が存在するとき

$$\int f(x)dx = F(x)$$

と書き。$F(x)$ を $f(x)$ の不定積分と言う。

関数 $y=f(x)$ は区間 $[a,b]$ で有界とする。$\Delta=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ が

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

を満たすとき，Δ を区間 $[a,b]$ の分割という。分割 Δ に対し $\max\{\,|x_i-x_{i-1}|\ \ i=1,\ldots,n\}$ を分割の最大幅といい $|\Delta|$ で表す。分割 Δ を1つ選ぶ。各 i $(i=1,\ldots,n)$ に対し

$$m_i=\inf\{\,f(x)|\ \ x_{i-1}\leqq x\leqq x_i\},\qquad M_i=\sup\{\,f(x)|\ \ x_{i-1}\leqq x\leqq x_i\}$$

とおく。また $S(\Delta)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})$, $s(\Delta)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})$ とおく。$\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0}S(\Delta)=\lim_{|\Delta|\to 0}s(\Delta)$ となるとき，$y=f(x)$ は $[a,b]$ で(定)積分可能であるといい，この極限値を $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ で表す。

定積分と不定積分の間には定義だけ見ると関係は見つからない。しかし関数 $y = f(x)$ が連続な場合は次の重要な関係 (微積分の基本定理) が知られている。
定理: $y = f(x)$ は $[a, b]$ で連続とする。このとき $f(x)$ の不定積分を $F(x)$ とすると

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

が成立する。

$\boxed{2}$ 次の積分が存在する場合は計算せよ。存在しないときはそのことを示せ。

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx$$

解答例: **広義積分の問題です。定義を理解していれば簡単ですね。**
$x = 0$ が特異点なので,

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx = \int_0^1 \frac{1}{x}dx + \int_{-1}^0 \frac{1}{x}dx$$

として，それぞれの広義積分の収束を考える。$\varepsilon > 0$ に対し $I(\varepsilon) = \displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx$ とおく。$I(\varepsilon) = \log 1 - \log\varepsilon = -\log\varepsilon$ であるが，$\varepsilon \to +0$ のとき $I(\varepsilon) \to \infty$ なので，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ は存在しない。広義積分 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx$ が存在するためには，広義積分 $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{x}dx$ と広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ の両方が存在しなければならない。よって広義積分 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx$ は存在しない。

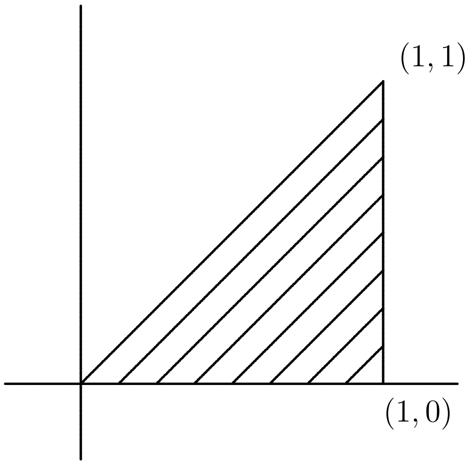
$\boxed{3}$ 次の重積分について考える。ただし $D = \{0 \leqq y \leqq x \leqq 1\}$ とする。

$$I = \iint_D e^{-x^2} dxdy$$

(1) 領域 D を図示せよ。
(2) D をを横線形 ($\{\,(x, y) \mid\ c \leqq y \leqq d, h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y)\}$ の形のもの) の形で表せ。
(3) 重積分 I を x を先に計算する形の累次積分で表せ (計算を実行しなくてもよい)。
(4) D を縦線形 ($\{\,(x, y) \mid\ a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x)\}$ の形のもの) の形で表せ。
(5) 重積分 I を y を先に積分する形の累次積分で表せ。

(6) I を求めよ。

解答例： **重積分を累次積分に直せるかを見る問題です。それ以前に領域の処理を誤った解答が多数見られました。不等式で表される領域は不等式 1 つづつきちんと見ていけば間違わないはずなんですが…。**
(1) 領域 D は 3 つの不等式 a) $0 \leqq y$, b) $y \leqq x$, c) $x \leqq 1$ の共通部分として定義されている。a) は直線 $y = 0$ の上の部分の領域，b) は直線 $y = x$ の下の部分の領域，c) は直線 $x = 1$ の左の部分の領域なので図示すると次図の斜線部分となる。



(2) 図より y の動く範囲は $0 \leqq y \leqq 1$ であり，y をこの範囲で 1 つ固定したとき，x の動く範囲は $y \leqq x \leqq 1$ なので $D = \{\,(x, y)\,|\ \ 0 \leqq y \leqq 1,\ y \leqq x \leqq 1\}$ である。
(3) 累次積分の定理より

$$I = \int_0^1 \left\{ \int_y^1 e^{-x^2} dx \right\} dy$$

となる。
(4) 図より x の動く範囲は $0 \leqq x \leqq 1$ であり，x をこの範囲で 1 つ固定したとき，y の動く範囲は $0 \leqq y \leqq x$ なので

$$D = \{\,(x, y)\,|\ \ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x\}$$

である。
(5) 累次積分の定理より

$$I = \int_0^1 \left\{ \int_0^x e^{-x^2} dy \right\} dx$$

となる。

(6) $\displaystyle\int_0^x e^{-x^2}dy = \left[e^{-x^2}y\right]_{y=0}^{x} = xe^{-x^2}$ が成立する。よって (5) より $I = \displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}dx$ となる。$t=-x^2$ とおいて変数変換を行う。$\dfrac{dt}{dx} = -2x$ であり，x が $0 \to 1$ と変化するとき，t は $0 \to -1$ と変化するので,

$$I = \int_0^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)e^t dt = -\frac{1}{2}\left[e^t\right]_0^{-1} = \frac{1}{2}\left(1-e^{-1}\right)$$

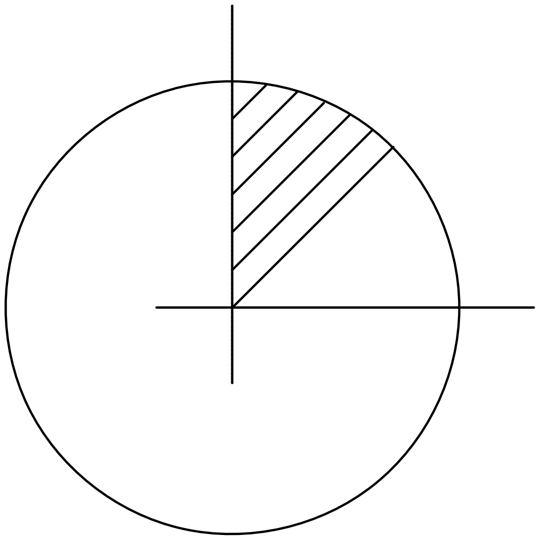
となる。(3) **の累次積分では積分計算が実行できません。**I **を計算するには** (5) **の累次積分を使います。**

$\boxed{4}$ 次の重積分において $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とおいて変数変換を考える。

$$I = \iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy \qquad D = \{\,(x,y) \mid\ x^2+y^2 \leqq 1, 0 \leqq x \leqq y\}$$

(1) 領域 D を図示せよ。
(2) D に対応する (r,θ)–平面の領域 E を求めよ。
(3) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ。
(4) 変数変換が可能なための条件を述べ，今の場合その条件が満たされている事を示せ。
(5) I を r,θ に関する重積分の形で書け。
(6) I を求めよ。

解答例：　**これは変数変換ができるかどうか見る問題です。変数変換が可能な条件をきちんと調べて下さい。またせっかくヤコビアンを計算したのに重積分にヤコビアンが使用されていない解答が若干ありました。定理の形をきちんと確認しておいて下さい。**
(1) 領域 D は 3 つの不等式 a) $x^2+y^2 \leqq 1$, b) $0 \leqq x$, c) $x \leqq y$ の共通部分として定義されている。a) は半径 1 の円の内部の領域，b) は直線 $x=0$ の右の部分の領域, c) は直線 $x=x$ の上の部分の領域なので図示すると次図の斜線部分となる。



(2) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ は極座標から直交座標への変換である。斜線部に対応する極座標での領域は $\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqq r \leqq 1$ なので

$$E = \left\{ (r,\theta) \middle| \ \frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq r \leqq 1 \right\}$$

である。

(3) ヤコビ行列は $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ なので，ヤコビアンは $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det \dfrac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = r$ である。

(4) 変数変換が可能な条件は 1)1 対 1 でない部分の面積が 0，2) ヤコビアンが 0 となる部分が面積確定の 2 つである。D と E の対応は $r = 0$ のときは 1 対 1 ではない。$r \neq 0$ のとき 1 対 1 でないと仮定すると，$(r_1,\theta_1) \neq (r_2,\theta_2)$ となる r_i, θ_i $(i = 1,2)$ で $x_i = r_i\cos\theta_i$, $y_i = r_i\sin\theta_i$ とおいたとき $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ となるものが存在する。このとき $r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = r_2^2$ となり，$r_1 \geqq 0, r_2 \geqq 0$ より $r_1 = r_2$ が分かる。このとき $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$ であるが，$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta_1 \leqq \dfrac{\pi}{2}$ $\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta_2 \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $\theta_1 = \theta_2$ が分かり矛盾。よって $r > 0$ では 1 対 1 である。$r = 0$ となる部分は線分領域なので面積 0 であり，条件 1) は満たされている。

ヤコビアンが 0 になるのは前と同じ線分領域なので面積 0 であり，面積確定である。

以上により変数変換の条件が満たされている事が分かる。

(5) **この問題は重積分の形で書く事を要求しているのであって，累次積分の形で書く事を要求している分けではありません。** $x^2 + y^2 = r^2$ であり，ヤコビアンが r なので

$$I = \iint_E e^{-r^2} \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} dr d\theta = \iint_E r e^{-r^2} dr d\theta$$

となる。

(6) $I=\iint_E re^{-r^2}drd\theta=\int_0^1\int_{\pi/4}^{\pi/2}re^{-r^2}d\theta dr=\dfrac{\pi}{8}\left(1-e^{-1}\right)$ となる。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の 3 重積分を計算せよ。

$$I=\iiint_D zdxdydz \qquad D=\{\,(x,y,z)\mid\ 0\leqq x\leqq y^2, z\leqq y\leqq 2z, 0\leqq z\leqq 1\}$$

解答例： $I=\displaystyle\int_0^1\left\{\int_z^{2z}\left\{\int_0^{y^2}zdx\right\}dy\right\}dz=\frac{7}{15}$ となる。