数理解析 I 第 1 回試験

2004–6–23　　河野

注意: 「答」そのものは採点の対象にはしない。「答」に至る過程を採点の対象にする。したがって，答案は単に「答」を書くだけでなく,「答」に至るまでの経緯を論理的に論述する事。

答案作成は数式も含め作文であるから，主語・述語・テニヲハ・句読点等に十分注意する事。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 次の命題の否定命題をつくれ。またその否定命題が正しいかどうか，理由をつけて答えよ。

ある正数 ε が存在して，任意の正数 δ に対し，ある x が存在して，$|x| < \delta$ かつ $|x^2| \geqq \varepsilon$ が成立する。

「ある ε に対して $P(\varepsilon)$」を否定すると「任意の ε に対し $\neg P(\varepsilon)$」となり,「任意の δ に対し $Q(\delta)$」を否定すると「ある δ が存在して $\neg Q(\delta)$」となる。また「$|\,x| < \delta$ かつ $|x^2| \geqq \varepsilon$」の否定は「$\neg(|x| < \delta)$ または $|x^2| < \varepsilon$」であるが，これは「$|x| < \delta$ ならば $|x^2| < \varepsilon$」になる。

否定命題は「任意の正数 ε に対しある正数 δ が存在して，任意の x に対し $|x| < \delta$ ならば $|x^2| < \varepsilon$」となる。

この否定命題は正しい。何故なら，任意の正数 ε に対し $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ と置く。任意の x に対し，$|x| < \delta$ が成立しているとき，両辺を 2 乗すると $|x^2| < \delta^2 = \varepsilon$ となるからである。

2 関数 $y = \log x$ を定義に基づいて微分せよ。ただし次の極限値は用いてよい。

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \qquad \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$k = \log(x+h) - \log x$ と置くと，$k = \log\left(\dfrac{x+h}{x}\right)$ より，$\dfrac{x+h}{x} = e^k$ となる。よって $x + h = xe^k$ より $h = x(e^k - 1)$ となる。$h \to 0$ のとき $k \to 0$ となるので

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{k}{x(e^k - 1)} \\ &= \frac{1}{x} \frac{1}{\displaystyle\lim_{k\to 0} \frac{e^k - 1}{k}} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

3 関数 $y = x\log x\ (x > 0)$ の概形を書け。

$y = f(x) = x\log x$ と置くと $y' = f'(x) = \log x + 1$ となるので $x = \dfrac{1}{e}$ で $f'(x) = 0$ であり，$0 < x < \dfrac{1}{e}$ で $f'(x) < 0$, $\dfrac{1}{e} < x$ で $f'(x) > 0$ となる。また $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ より $y = f(x)$ は下に凸である。$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0}\frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0} -x = 0$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ となる。以上によりグラフの概形は次図の様になる。

4 $z = xy, s = x\cos y, t = x\sin y$ について次の問に答えよ。

(1) $\dfrac{D(s,t)}{D(x,y)}$ を求めよ。

$$\frac{D(s,t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial s}{\partial x} & \dfrac{\partial s}{\partial y} \\ \dfrac{\partial t}{\partial x} & \dfrac{\partial t}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{pmatrix}$$ である。

(2) $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ を求めよ。

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \left(\frac{D(s,t)}{D(x,y)}\right)^{-1} = \frac{1}{x}\begin{pmatrix} x\cos y & x\sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\dfrac{\sin y}{x} & \dfrac{\cos y}{x} \end{pmatrix}$$ である。

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ を求めよ。

合成関数の微分法より $\dfrac{\partial z}{\partial s} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s}$ が成立している。$\dfrac{\partial z}{\partial x} = y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x$, $\dfrac{\partial x}{\partial s} = \cos y$, $\dfrac{\partial y}{\partial s} = -\dfrac{\sin y}{x}$ となるので

$$\frac{\partial z}{\partial s} = y\cos y - x\frac{\sin y}{x} = y\cos y - \sin y$$

である。

(4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}$ を求めよ。

$w = \dfrac{\partial z}{\partial s}$ とおくと $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2} = \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s} = 0 \cdot \dfrac{\partial x}{\partial s} + (\cos y - y\sin y - \cos y)\left(-\dfrac{\sin y}{x}\right) = \dfrac{y}{x}\sin^2 y$ となる。

$\boxed{5}$ $y = \dfrac{1}{1+x}$ の $x=0$ におけるテーラー級数を求めよ。

テーラー級数は n 次導関数を求めればできる。しかしテーラー級数は微分を用いなくても求める事ができる場合もある。ここでは微分を使わない方法を紹介しておく。

初項 1 公比 $-x$ の等比数列の第 1 項から第 n 項までの和は

$$1+(-x)+(-x)^2+\cdots+(-x)^{n-1} = \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} = \frac{1-(-x)^n}{1+x}$$

である。ここで $|x|<1$ として $n\to\infty$ とすると，$(-x)^n\to 0$ なので

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$$

を得る。

$\boxed{6}$ $z = x^4+y^4-2x^2+4xy+2y^2$ の極値と極値をとる点を求めよ。

すいませんでした。間違って難度の高い問題になってしまいました。

最初に臨界点 (**grad** $z=\mathbf{0}$ となる点) を求める。$z_x = 4x^3-4x+4y, z_y = 4y^3+4x+3y, z_{xx} = 12x^2-4 = 4(3x^2-1), z_{yy} = 12y^2+4 = 4(3y^2+1), z_{xy} = 4$ である。臨界点 (x,y) では $\dfrac{1}{4}z_x = x^3-x+y = 0$ 及び $\dfrac{1}{4}z_y = y^3+x+y = 0$ が成立している。$x=0$ のときは $y=0$ となり $(x,y)=(0,0)$ では **grad** $z=\mathbf{0}$ となるので臨界点になる。よって $x\neq 0$ とする。$y = x(1-x^2)$ を $y^3+x+y=0$ に代入すると $x^3(1-x^2)^3+x+x(1-x^2)=0$ となる。$x\neq 0$ より x で割ると $x^2(1-x^2)^3+1+1-x^2=0$ となる。$X=x^2>0$ と置くと

$$X^4-3X^3+3X^2-2=0$$

となる。$Y=f(X)=X^4-3X^3+3X^2-2$ と置き微分すると $Y'=f'(X)=4x^3-9X^2+6X = X(4X^2-9X+6)$ となる。$4X^2-9X+6=0$ の判別式は $D=(-9)^2-4\cdot4\cdot6=-15<0$ なので $4X^2-9X+6>0$ である。$f'(X)=X(4X^2-9X+6)$ は $X>0$ で単調増加であり，$f(0)=-2<0$ なので $f(X)=0$ は $X>0$ で唯 1 つの解 α を持つ。また $f(1)=-1<0$ より $\alpha>1$ が分かる。以上により臨界点は $(x,y)=(0,0),(\sqrt{\alpha},\sqrt{\alpha}(1-\alpha)),(-\sqrt{\alpha},-\sqrt{\alpha}(1-\alpha))$ である事が分かる。ただし α は $f(x)=x^4-3x^3+3x^2-2=0$ の $x>0$ となる唯 1 つの解である。

$H(x,y) = z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2 = 16\left\{(3x^2-1)(3y^2+1)-1\right\}$ である。$H(0,0)=0$ なのでこれだけからは分からない。$\alpha>1$ より $3\alpha-1>2$ となるので $H(\pm\sqrt{\alpha},\pm\sqrt{\alpha}(1-\alpha)) = 16\left\{(3\alpha-1)(3y^2+1)-1\right\} > 16\left\{1\cdot1-1\right\}=0$ なので極値を取る。$z_{xx}(\pm\sqrt{\alpha},\pm\sqrt{\alpha}(1-\alpha))>0$ なので極小値である。

$(x,y)=(0,0)$ の近傍における z の様子を見る。x 軸に制限とすると $y4+2y^2$ となるので $(0,0)$ の幾らでも近くに $(0,0)$ より大きい値を持つ点が存在する。y 軸に制限すると x^4-2x^2 となる。増減表より $(0,0)$ の幾らでも近くに $(0,0)$ より小さな値を持つ点が存在する。よって $(0,0)$ で極値をとる事はありえない。

以上により z は $(x,y)=(\sqrt{\alpha},\sqrt{\alpha}(1-\alpha)),(-\sqrt{\alpha},-\sqrt{\alpha}(1-\alpha))$ で極小値をとる。ただし α は $f(x)=x^4-3x^3+3x^2-2=0$ の $x>0$ となる唯 1 つの解である。

裏にも問題有り

学科		在番籍号		氏名	

$\boxed{\mathbf{7}}$ 3 辺の和が一定の 3 角形の中で面積が最大なものが存在する事を示し，それを求めよ。

このタイプの問題では何を変数に選ぶかで計算量が変わる。ここではヘロンの公式を用いて解こう。ヘロンの公式：3 角形の 3 辺の長さを a, b, c とするとき，$s = \dfrac{a+b+c}{2}$ とおくとき，3 角形の面積 S は $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ となる。

3 角形の各辺の長さを x, y, z とする。3 辺の長さの和は一定であるのでこれを $2s$ とおく，即ち $x+y+z=2s$ $(s>0)$ が成立している。x, y, z は辺の長さであるから $x>0, y>0, z>0$ を満たしている。x, y, z が 3 角形の 3 辺をなすためには 3 角不等式，即ち $x+y>z, y+z>x, z+x>y$ が成立している事が必要である。逆にこれらの不等式が成立しているとき，3 辺の長さが x, y, z であるような 3 角形が存在する。z を消去して x, y の不等式から $x<s, y<s, x+y>s$ が得られる。逆にこの 3 つの不等式をみたす x, y は最初の 6 つの不等式を満たす。(この部分は各自チェックする事。) よって $D = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x<s, y<s, x+y>s \right\}$ 上で最大値問題を考える。しかし講義で述べた様に，最大値定理を適用するには領域が有界閉集合である必要がある。

$\overline{D} = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x \leqq s, y \leqq s, x+y \geqq s \right\}$ とおく。ここで S が最大のとき S^2 が最大であり，逆も成立する。よって S^2 が最大になる場合を求めるればよい。$f(x,y) = S^2 = s(s-x)(s-y)(x+y-s)$ とおき，$\overline{D}$ 上で $f(x,y)$ の最大値を求める。$\overline{D}$ は有界閉集合であり，$f(x,y)$ は $\overline{D}$ 上の連続関数なので最大値が存在する。境界上または内部の点が最大値を与える。境界上では関数は $f(x,y)=0$ となる。内部で最大値をとる点は (広義の) 極値になっている。臨界点を求める。$f_x = s(s-x)(s-y) - s(s-y)(x+y-s) = 0$, $f_y = s(s-x)(s-y) - s(s-x)(x+y-s) = 0$ より $(x,y) = (0,s).(s,0),(s,s),\left(\dfrac{2s}{3}, \dfrac{2s}{3}\right)$ が得られる。この中に最大値を与える点が存在するので，それは $(x,y) = \left(\dfrac{2s}{3}, \dfrac{2s}{3}\right)$ である。以上により最大値を与える 3 角形は**正 3 角形**である。

$\boxed{\mathbf{8}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (10)。