数理解析 I 第 2 回試験

2004–6–28　　河野

注意: 「答」そのものは採点の対象にはしない。「答」に至る過程を採点の対象にする。したがって，答案は単に「答」を書くだけでなく,「答」に至るまでの経緯を論理的に論述する事。
　答案作成は数式も含め作文であるから，主語・述語・テニヲハ・句読点等に十分注意する事。
　証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。
　採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
　在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 関数 $z = f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ について次の問に答えよ。
(1) $z = f(x, y)$ の臨界点を求めよ。
(2) $z = f(x, y)$ の極値と極値をとる点を求めよ。

ボーナス点のつもりでしたが，ボーナスにはあまりならなかった様です。1 次式ではない連立方程式が解けない人が多くいました。また間違った解を得て，そのまま計算を実行している人もいました。たとえば $(x, y) = (1, 0)$ など。元の式に代入してみれば成立しないので間違っている事はすぐ分かるはずです。

(1) $z_x = 4x^3 - 4x + 4y, z_y = 4y^3 + 4x - 4y, z_{xx} = 4(3x^2 - 1), z_{yy} = 4(3y^2 - 1), z_{xy} = 4, H(x, y) = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 16\left\{(3x^2 - 1)(3y^2 - 1) - 1\right\}$ である。臨界点 (x, y) とは $\mathbf{grad}\, f = (z_x, z_y) = (0, 0)$ となる点なので，

$$
\begin{aligned}
x^3 - x + y &= 0 \\
y^3 + x - y &= 0
\end{aligned}
$$

を満たしている。両辺を加えると $x^3 + y^3 = 0$ 即ち $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 0$ を得る。$x + y = 0$ または $x^2 - xy + y^2 = 0$ が成立しているが，$x^2 - xy + y^2 = 0$ が成立するのは $(x, y) = (0, 0)$ のときのみなので，結局 $x + y = 0$ を得る。これを最初に式に代入すると，$x^3 - 2x = x(x^2 - 2) = 0$ となるので，$x = 0, \pm\sqrt{2}$ となる。よって臨界点は $(x, y) = (0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ となる。

(2) $H(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}) = 16(5 \cdot 5 - 1) > 0$ なので $(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$ は極値を与える。
$H(0, 0) = 0$ なのでこれだけからは分からない。x 軸に制限して考えると，$u = f(x, 0) = x^4 - 2x^2$ となるが，導関数は $u' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$ なので増減表は

x		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
u'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
u	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

となるので，u は $x = 0$ で極大となり，$f(0, 0)$ より小さい値を与える点が $(0, 0)$ の いくらでも近くに存在する。
直線 $x - y = 0$ 上に制限すると，$v = f(x, x) = 2x^4$ となり，v は $x = 0$ で極小となるので，$f(0, 0)$ より大きい値を与える点が $(0, 0)$ のいくらでも近くに存在する。よって $(0, 0)$ は極値をあたえない。別の問題の解答を形式的になぞって，y 軸上で考えて，示されたとする解答が若干存在した。この関数は x, y について対称なので，y 軸に制限してもやはり極大なので，$(0, 0)$ の近くに大きな値を与える点の存在は言えない。
以上により極値を与える点は $(x, y) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ であり，極値は $f(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}) = -8$ である。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\displaystyle\int (2x+5)^6 dx$ を求めよ。

講義中に何度も言ったが，検算を**必ず**する事。求まった関数を微分して被積分関数になれば，解答は正しい事が分かる。だからこの問題に限らず，不定積分では計算間違いに対しては厳しい採点基準を採用している。

$\dfrac{dt}{dx} = 2$ なので $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2}$ となる。

$$\begin{aligned}\int (2x+5)^6 dx &= \int t^6 \frac{dx}{dt} dt \\ &= \frac{1}{2}\int t^6 dt \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}t^7 \\ &= \frac{1}{14}(2x+5)^7\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\displaystyle\int x\sin x dx$ を求めよ。

$(-\cos x)' = \sin x$ より

$$\begin{aligned}\int x\sin x dx &= \int x(-\cos x)' dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x dx \\ &= -x\cos x + \sin x\end{aligned}$$

4 問いに答えならが次の不定積分を求めよ。

$$I = \int \frac{12}{x^3 - 8}\,dx$$

(1) $\dfrac{12}{x^3-8}$ を部分分数展開せよ。
(2) $J = \displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+4}\,dx$ を $u = x+1$ とおいて u に関する積分に変形せよ。
(3) (2) で変形した J を $u = \sqrt{3}\tan t$ とおいて t に関する積分に変形せよ。
(4) 積分 I を求めよ。

(1) $x^3 - (x-2)(x^2+2x+4)$ より $\dfrac{12}{x^3-8} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{Bx+C}{x^2+2x+4}$ とおいて A, B, C を求めると,

$$\frac{12}{x^3-8} = \frac{1}{x-2} - \frac{x+4}{x^2+2x+4}$$

となる。部分分数展開において分子の次数は分母の次数以下になる。分母の次数が 2 の場合分子の次数は高々1 である。これを定数とおいて失敗している解答が若干あった。その人は部分分数をもう一度確認すること。

(2) $\dfrac{du}{dx} = 1$ なので

$$J = \int \frac{1}{(x+1)^2+3}\,dx = \int \frac{1}{u^2+3}\frac{dx}{du}\,du = \int \frac{1}{u^2+3}\,du$$

となる。

(3) $\dfrac{du}{dt} = \sqrt{3}\dfrac{1}{\cos^2 t}$ であり, $u^2+3 = 3(\tan^2 t + 1) = 3\left(\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + \dfrac{\cos^2 t}{\cos^2 t}\right) = \dfrac{3}{\cos^2 t}$ なので

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{\cos^2 t}{3}\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}\,dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int dt \end{aligned}$$

となる。

(4) $\dfrac{x+4}{x^2+2x+4} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(x^2+2x+4)'}{x^2+2x+4} + \dfrac{3}{x^2+2x+4}$ となるので,

$$I = \log|x-2| - \frac{1}{2}\log(x^2+2x+4) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{3}(x+1)\right)$$

となる。

裏にも問題有り

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\textbf{5}}$ 問いに答えならが次の不定積分を求めよ。

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$$

(1) $x = \dfrac{1}{\sin t}$ とおいて I を t に関する積分に変形せよ。
(2) $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$ とおき，$\dfrac{du}{dt}$ を u を用いて表せ。
(3) $\sin t = \sin 2\left(\dfrac{t}{2}\right)$ と見て $\sin t$ を u で表せ。このとき $\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right) + \cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right) = 1$ という関係を使うかもしれない。
(4) 積分 I を求めよ。

(1) $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}$ であり，$x^2 - 1 = \dfrac{1}{\sin^2 t} - 1 = \dfrac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t} = \dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t}$ なので

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin t}{\cos t}\left(-\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right)dt \\ &= -\int \frac{1}{\sin t}dt \end{aligned}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\dfrac{t}{2}} = \frac{1}{2}\frac{\cos^2\dfrac{t}{2}+\sin^2\dfrac{t}{2}}{\cos^2\dfrac{t}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left\{1+\tan^2\frac{t}{2}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(1+u^2\right) \end{aligned}$$

となる。
(3)

$$\begin{aligned} \sin t &= \sin 2\left(\frac{t}{2}\right) = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} = \frac{2\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}}{\cos^2\dfrac{t}{2}+\sin^2\dfrac{t}{2}} \\ &= \frac{2\tan\dfrac{t}{2}}{1+\tan^2\dfrac{t}{2}} = \frac{2u}{1+u^2} \end{aligned}$$

(4) $x = \dfrac{1}{\sin t}$ より $\sin t = \dfrac{1}{x}$，よって $t = \arcsin\dfrac{1}{x}$ となるので，

$$\begin{aligned} I = &= -\int \frac{1}{\sin t}dt = -\int \frac{1+u^2}{2u}\frac{2}{1+u^2}du \\ &= -\int \frac{1}{u}du = -\log|u| \\ &= -\log\left|\tan\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x}\right)\right| \end{aligned}$$