数理解析 I 第 1 回小テスト

2004–5–27　　河野

注意: 「答」そのものは採点の対象にはしない。「答」に至る過程を採点の対象にする。したがって，答案は単に「答」を書くだけでなく,「答」に至るまでの経緯を論理的に論述する事。

答案作成は数式も含め作文であるから，主語・述語・テニヲハ・句読点等に十分注意する事。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

裏にも問題あり

1 次の関数を定義に基づいて微分せよ。ただし次の極限値は用いてよい。

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1 \qquad \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

(1) $y=x^3$

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left\{3x^2+3xh+h^2\right\} \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

(2) $y=\sin 2x$

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin 2(x+h)-\sin 2x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin 2x\cos 2h+\cos 2x\sin 2h-\sin 2x}{h} \\ &= \sin 2x\lim_{h\to 0}\frac{\cos 2h-1}{h}+2\cos 2x\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{2h} \end{aligned}$$

となるが，ここで $\dfrac{\cos 2h-1}{h}=\dfrac{(\cos 2h-1)(\cos 2h+1)}{h(\cos 2h+1)}=\dfrac{-sin2h^2}{h(\cos 2h+1)}$ となるので

$$\begin{aligned} y' &= \sin 2x\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\sin 2h}{2h}\,\frac{-2\sin 2h}{\cos 2h+1}\right\}+2\cos 2x\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{2h} \\ &= 2\cos 2x \end{aligned}$$

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の関数の導関数を求めよ (諸公式を用いてよい)。

(1) $x^3e^{x^2}$

与式を y と置くと

$$y' = \left(x^3\right)' e^{x^2} + x^3 \left(e^{x^2}\right)'$$

となる。$t = x^2,\ z = e^t$ と置くと

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= \frac{dz}{dt}\frac{dt}{dx} \\ &= e^t 2x = 2xe^{x^2}\end{aligned}$$

となるので

$$y = 3x^2e^{x^2} + 2xe^{x^2}$$

となる。

(2) $\arcsin(1-2x^2)$

$t = 1-2x^2,\ y = \arcsin t$ と置く。$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ より

$$\begin{aligned}y' &= \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} \\ &= \frac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}}\end{aligned}$$