数理解析 II 第 1 回試験

2004–12–7　　河野

注意: 「答」そのものは採点の対象にはしない。「答」に至る過程を採点の対象にする。したがって，答案は単に「答」を書くだけでなく,「答」に至るまでの経緯を論理的に論述する事。

答案作成は数式も含め作文であるから，主語・述語・テニヲハ・句読点等に十分注意する事。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 次の事に関し簡単に説明せよ。

(1) 1 変数関数 $y = f(x)$ の不定積分の定義を述べよ。

(2) 1 変数関数 $y = f(x)$ の区間 $[a, b]$ における定積分の定義を述べよ。

(3) 定積分と不定積分の関連及び無関連に関し説明せよ。

(1) 関数 $f(x)$ に対し $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を $f(x)$ の不定積分といい，$F(x) = \displaystyle\int f(x)dx$ と書く。

(2) $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ が $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ を満たすとき $[a, b]$ の分割という。Δ を $[a, b]$ の分割とする。各 i $(i = 1, \dots, n)$ に対し $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $m_i = \inf\{\, f(x) \mid\ x_{i-1} \leqq x \leqq x_i \,\}$, $M_i = \sup\{\, f(x) \mid\ x_{i-1} \leqq x \leqq x_i \,\}$ とおくとき，$s(\Delta) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$, $S(\Delta) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ と定義する。また $|\Delta| = \max\{\, \Delta x_i \mid\ i = 1, \dots, n \,\}$ とする。$\displaystyle\lim_{|\Delta| \to 0} s(\Delta) = \lim_{|\Delta| \to 0} S(\Delta)$ となるとき，関数 $y = f(x)$ は $[a, b]$ で積分可能であるといい，この極限値を $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ と書く。

(3) (1), (2) から分かるように定義だけ見ると，定積分と不定積分の間に関連は見えない。しかし，被積分関数が連続関数の場合は「微積分の基本定理」により関連がある事が分かる。微積分の基本定理とは，$y = f(x)$ を $[a, b]$ において連続とする。$F(x)$ を $f(x)$ の不定積分とすると $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x) \Big]_a^b$ が成立するというもの。

2 次の広義積分は収束するか。収束しないときはそのことを示し，収束するときは計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx$

(2) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$

(1) $x = 0$ が不連続点なので，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x} dx$, $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx$ がともに収束するとき $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ は収束する。$0 < \varepsilon < 1$ となる ε に対し $I(\varepsilon) = \displaystyle\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx$ と定義すると，$I(\varepsilon) = \log 1 - \log \varepsilon = -\log \varepsilon$ となる。$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to +0} I(\varepsilon)$ であるが，これは収束しないので，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ は収束しない。よって広義積分 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ も収束しない。

(2) $M > 1$ となる M に対し $I(M) = \displaystyle\int_1^M \frac{1}{x^2} dx$ と定義すると，$I(M) = \Big[-\dfrac{1}{x} \Big]_1^M = 1 - \dfrac{1}{M}$ となる。広義積分は収束して，$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{M \to \infty} I(M) = 1$ となる。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の関数は積分可能か。不可能な場合はその事を示し。可能な場合は定義に基づいて積分を計算せよ。ただし $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$ を用いてよい。

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^3 dx$

(2) 関数 $y = f(x)$ は x が有理数なら $f(x) = -1$, 無理数なら $f(x) = 1$ となる関数とする。$\displaystyle\int_0^1 f(x) dx$

(1) $\Delta_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ を $[0,1]$ の n 等分割とする。即ち, $x_i = \dfrac{i}{n}$ とする。$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \dfrac{1}{n}$ である。$y = x^3$ は $[0,1]$ で単調増加なので $m_i = \inf\{ f(x) \mid\ x_{i-1} \leqq x \leqq x_i \} = f(x_{i-1}) = f\left(\dfrac{i-1}{n}\right) = \left(\dfrac{i-1}{n}\right)^3$ となる。同様に $M_i = \sup\{ f(x) \mid\ x_{i-1} \leqq x \leqq x_i \} = f(x_i) = f\left(\dfrac{i}{n}\right) = \left(\dfrac{i}{n}\right)^3$ となる。$S(\Delta_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^3 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{n^4} \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$ であり, $s(\Delta_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^3 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 = \frac{1}{n^4} \sum_{i=0}^{n-1} i^3 = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n-1} i^3 = \frac{1}{n^4} \left\{ \frac{(n-1)n}{2} \right\}^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$ となる。$n \to \infty$ のとき $|\Delta_n| = \dfrac{1}{n} \to 0$ となるので $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s(\Delta_n) = \lim_{n\to\infty} S(\Delta_n) = \frac{1}{4}$ となる。よって $y = x^3$ は $[0,1]$ で積分可能であり, $\displaystyle\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$ となる。

(2) $[0,1]$ の分割を $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ とする。どんな小さな区間の中にも有理数及び無理数は存在するので, $m_i = \inf\{ f(x) \mid\ x_{i-1} \leqq x \leqq x_i \} = -1$ であり, $M_i = \sup\{ f(x) \mid\ x_{i-1} \leqq x \leqq x_i \} = 1$ である。$s(\Delta) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)\Delta x_i = -\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = -(1-0) = -1$ であり, $S(\Delta) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = (1-0) = 1$ となる。よって $\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0} s(\Delta) = -1$ であり, $\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0} S(\Delta) = 1$ なので $y = f(x)$ は $[0,1]$ で積分可能でない。

$\boxed{\textbf{4}}$ $x = x(t) = 3t - t^3, y = y(t) = 1 - t^2$ でパラメータ表示された曲線について次の問に答えよ。

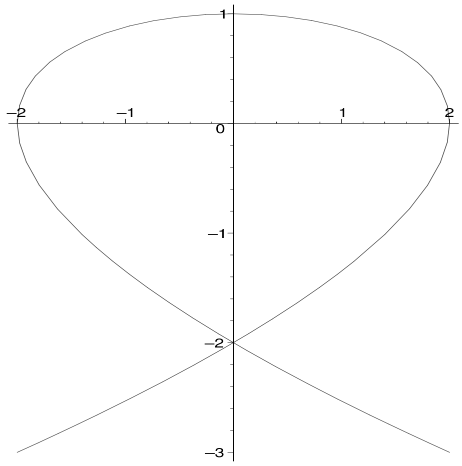
(1) この曲線の概形を書け。

(2) この曲線によって囲まれる部分の面積を求めよ。

(1) $x' = 3 - 3t^3$ より $t = \pm 1$ において $x' = 0$ となる。$y' = -2t$ より $t = 0$ において $y' = 0$ となる。よって増減表は以下の様になる。

t		-1		0		1	
x'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
曲線	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\leftarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$

$x = 0$ となるのは $t = 0, \pm\sqrt{3}$, $y = 0$ となるのは $t = \pm 1$ に注意して概形を描くと次の様になる。



(2) t が $-\sqrt{3}$ から $\sqrt{3}$ まで変化するとき閉曲線を描く。よって求める面積を S とすると $S = \displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}} x(t)y'(t)dt = \int_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}} (2t^4 - 6t^2)dt = \left[\frac{2}{5}t^5 - 2t^3\right]_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{5}$ である。

裏にも問題有り

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{5}}$ $y = x^3 - 2x + 3$ と $y = x^2 + 3$ にはさまれる領域で $x \geqq 0$ の部分の面積を求めよ。またこの領域を x 軸の周りに回転してできる回転体の体積を求めよ。

$y = x^3 - 2x + 3$ と $y = x^2 + 3$ の交点の x 座標は $x^3 - 2x + 3 = x^2 + 3$ を解いて，$x = -1, 0, 2$ となる。今 $x \geqq 0$ の部分なので求める領域は $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲になる。この範囲では $x^2 + 3 \geqq x^3 - 2x + 3$ なので求める面積を S とすると，$S = \displaystyle\int_0^2 \left\{(x^2+3) - (x^3 - 2x + 3)\right\} dx = \frac{8}{3}$ である。
求める回転体の体積 V は $y = x^2 + 3$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ を回転させてできる回転体の体積から $y = x^3 - 2x + 3$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ を回転させてできる回転体の体積を引いたものなので，$V = \displaystyle\int_0^2 \left\{(x^2+3)^2 - (x^3 - 2x + 2)^2\right\} dx = \frac{400}{21}$ である。

$\boxed{\mathbf{6}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (10)。

例年の意見で多いのは

- 難しすぎる。
- 演習の時間を増やしてくれ。

等です。