数理解析 II 第 2 回試験

2005–2–22　　河野

注意: 「答」そのものは採点の対象にはしない。「答」に至る過程を採点の対象にする。したがって，答案は単に「答」を書くだけでなく,「答」に至るまでの経緯を論理的に論述する事。

答案作成は数式も含め作文であるから，主語・述語・テニヲハ・句読点等に十分注意する事。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

卒業を目指している 4 年生及び卒研着手を目指している 3 年生へ：該当の学生は解答の最初に目立つようにその旨を書いて下さい。該当の学生の解答を先に採点します。

$\boxed{1}$ $\displaystyle\iint_D xydxdy$ を定義に基づいて計算することを考える。ただし $D = \{0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1\}$ とする。

(1) $z = f(x, y) = xy$ が長方形領域 D で定積分可能である事の定義を述べよ。

(2) Δ_n を n 等分割とする。即ち $\Delta_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n; y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ とするとき，$x_i = \dfrac{i}{n}, y_j = \dfrac{j}{n}$ とする。このとき $S(\Delta_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sup\{\, f(x, y) \mid\ x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j\,\}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ を計算せよ。ただし $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ は既知としてよい。

(3) $\displaystyle\iint_D xydxdy$ を定義に基づいて計算せよ。

(1) D の分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\,;\, y_0, y_1 \ldots, y_m\}$ とは

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1, \qquad 0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = 1$$

を満たすものである。

$$M_{ij} = \sup\{\, xy \mid\ x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j\,\} \qquad m_{ij} = \inf\{\, xy \mid\ x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j\,\}$$

とするとき，$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ とおき,

$$S(\Delta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j, s(\Delta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j$$

と定義する。分割の最大幅 $\|\Delta\|$ を $\|\Delta\| = \max\{\, \Delta x_i, \Delta y_j \mid\ i = 1, \ldots, n\,,\, j = 1, \ldots, m\,\}$ で定義する。$\|\Delta\| \to 0$ とするとき，$S(\Delta)$, $s(\Delta)$ が同じ極限値に収束するとき，f は R で**積分可能** (*integrable*) であるという。

(2) xy は D においては x に関しても，y に関しても単調増加なので最大値は小領域の右上でとる。よって $M_{ji} = x_i y_i = \dfrac{ij}{n^2}$ である。よって

$$\begin{aligned} S(\Delta_n) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sup\{\, xy \mid\ x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j\,\}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{ij}{n^4} = \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{n^4}\frac{n(n+1)}{2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \end{aligned}$$

となる。

(3) $m_{ij} = x_{i-1}y_{j-1} = \dfrac{(i-1)(j-1)}{n^2}$ なので $s(\Delta_n) = \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^2$ となる。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S(\Delta_n) = \frac{1}{4} = \lim_{n\to\infty} s(\Delta_n)$ なので

$$\iint_D xydxdy = \frac{1}{4}$$

である。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

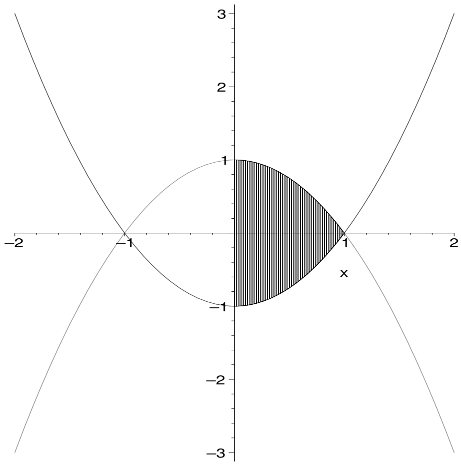
学科		在番籍号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の重積分について考える。ただし $D=\left\{x^2+|y|\leqq 1, x\geqq 0\right\}$ とする。

$$I=\iint_D xy^2dxdy$$

(1) 領域 D を図示せよ。
(2) 重積分 I を累次積分で表せ (計算を実行しなくてもよい)。
(3) I を求めよ。

絶対値は正負に関する場合分けで考える。
(1) $y\geqq 0$ のとき不等式 $x^2+|y|\leqq 1$ は $x^2+y\leqq 1$ となる。$y<0$ のとき不等式 $x^2+|y|\leqq 1$ は $x^2-y\leqq 1$ となる。よって D は $D_1=\left\{x^2+y\leqq 1, y\geqq 0, x\geqq 0\right\}$ と $D_2=\left\{x^2-y\leqq 1, y<0, x\geqq 0\right\}$ の和集合になる。領域は次図の様になる。



(2) 領域 D は $D=\left\{0\leqq x\leqq 1, x^2-1\leqq y\leqq 1-x^2\right\}$ と書けるので

$$\begin{aligned} I &= \iint_D xy^2dxdy \\ &= \int_0^1\left\{\int_{x^2-1}^{1-x^2} xy^2dy\right\}dx \end{aligned}$$

と表す事ができる。
(3)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1\left[x\frac{1}{3}y^3\right]_{y=x^2-1}^{1-x^2}dx \\ &= \frac{2}{3}\int_0^1 x(1-x^2)^3dx \end{aligned}$$

なので $t=1-x^2$ と変数変換すると

$$I = \frac{1}{3}\int_0^1 t^3dt=\frac{1}{12}$$

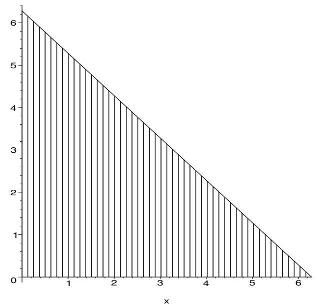
となる。

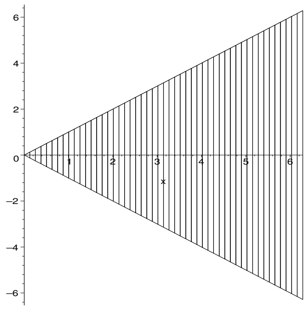
$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の重積分において $u=x+y, v=x-y$ とおいて変数変換を考える。

$$I=\iint_D |\sin(x+y)|dxdy \qquad D=\{x\geqq 0, y\geqq 0, x+y\leqq 2\pi\}$$

(1) 領域 D を図示せよ。
(2) D に対応する (u,v)–平面の領域 E を求め図示せよ。
(3) ヤコビアン $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ を求めよ。
(4) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ。
(5) 変数変換が可能なための条件を述べ，今の場合その条件が満たされている事を示せ。
(6) 変数変換を実行し，I を u,v に関する重積分の形で書け。
(7) I を求めよ。

(1) (2) D は $D_1=\{x\geqq 0\}$，$D_2=\{y\geqq 0\}$，$D_3=\{x+y\leqq 2\pi\}$ の共通部分なので次図左のようになる。
$x=\dfrac{u+v}{2}$，$y=\dfrac{u-v}{2}$ なので $x\geqq 0$ という条件は $\dfrac{u+v}{2}\geqq 0$ と書き直せる。以下同様に $\dfrac{u-v}{2}\geqq 0$，$u\leqq 2\pi$ となるので $E=\{u+v\geqq 0, u-v\geqq 0, u\leqq 2\pi\}$ となる。E は次図右の様になる。





(3) $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=-2$ **(4)** $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-\dfrac{1}{2}$
(5) 変数変換が可能なための条件は (1) 一対一でない領域の面積が 0，(2) ヤコビアンが 0 である領域が面積確定，である。今対応は一対一であり，ヤコビアンは常に 0 でない。よって一対一でない領域も，ヤコビアンが 0 の領域も空集合である。空集合は面積確定であり，面積 0 なので条件を満たしている。
(6)

$$\begin{aligned} I &= \iint_D |\sin(x+y)|dxdy \\ &= \iint_E |\sin u|\left|-\frac{1}{2}\right|dudv=\frac{1}{2}\iint_E |\sin u|dudv \end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{\int_{-u}^{u}|\sin u|dv\right\}du=\int_0^{2\pi}u|\sin u|du \\ &= \int_0^{\pi}u\sin udu-\int_{\pi}^{2\pi}u\sin udu=4\pi \end{aligned}$$

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

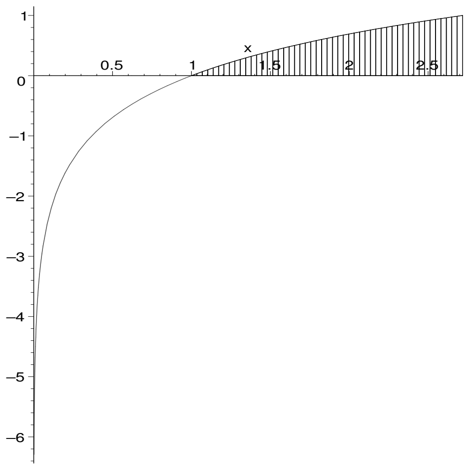
学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{4}$ 次の累次積分を計算する事を考える。

$$I=\int_1^e\left\{\int_0^{\log x}\frac{1+y}{x}dy\right\}dx$$

(1) 累次積分を重積分 $\displaystyle\iint_D\frac{1+y}{x}dxdy$ の形に変形する。このときの積分領域 D を図示せよ。
(2) この重積分を x を先に計算する累次積分に変形せよ。
(3) I を求めよ。

(1) $D=\{1\leqq x\leqq e, 0\leqq y\leqq \log x\}$ なので次図の様になる。



(2) $D=\{0\leqq y\leqq 1, e^y\leqq x\leqq e\}$ と表せるので

$$\begin{aligned}I &= \iint_D\frac{1+y}{x}dxdy\\ &= \int_0^1\left\{\int_{e^y}^e\frac{1+y}{x}dx\right\}dy\end{aligned}$$

となる。
(3)

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1\left\{\int_{e^y}^e\frac{1+y}{x}dx\right\}dy\\ &= \int_0^1\Big[(1+y)\log x\Big]_{x=e^y}^e dy\\ &= \int_0^1(1+y)(1-y)dy\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 一様な密度 μ を持つ半径 r の半球 $D=\left\{x^2+y^2+z^2 \leqq r^2, x \geqq 0\right\}$ の重心を求める事を考える。D の質量 K は

$$K=\iiint_D \mu dxdydz$$

で与えられる。これを計算するため，$x=s\sin\theta\cos\varphi, y=s\sin\theta\sin\varphi, z=s\cos\theta$ と極座標に変換する。ただし極座標なので $s \geqq 0$ とする。

(1) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(s,\theta,\varphi)}$ を求めよ。ただし行列式の計算過程もきちんと書くこと。
(2) D に対応する (s,θ,φ)–空間の領域 E を求めよ。
(3) この対応で一対一でない E の領域を求めよ。
(4) ヤコビアンが 0 になる E の領域を求めよ。
(5) K を求めよ。
(6) D の x に関するモーメント M_x は $\iiint_D x\mu dxdydz$ で与えられる。M_x を求めよ。
(7) D の重心 (c_x, c_y, c_z) を求めよ。

(1)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(s,\theta,\varphi)} &= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & s\cos\theta\cos\varphi & -s\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & s\cos\theta\sin\varphi & s\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -s\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\
&= s^2\sin\theta
\end{aligned}$$

(2) (s,θ,φ) は極座標であり，D が半球である事に注意すると

$$D=\left\{0 \leqq s \leqq r, 0 \leqq \theta \leqq \pi, -\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}\right\}$$

となる。

(3) $s=0$ または $\theta=0,\pi$ のとき一対一でない。$s \neq 0$ かつ $\theta \neq 0,\pi$ のとき一対一である事を示す。$i=1,2$ に対し $x_i=s_i\cos\theta_i\cos\varphi_i, y_i=s_i\cos\theta_i\sin\varphi_i, z_i=s_i\cos\theta_i$ とする。$(x_1,y_1,z_1)=(x_2,y_2,z_3)$ で $s_i \neq 0$ かつ $\theta_i \neq 0,\pi$ のとき $s_1=s_2, \theta_1=\theta_2, \varphi_1=\varphi_2$ を示せばよい。$s_1^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2=s_2^2$ となるが，$s_1>0, s_2>0$ より $s_1=s_2$ となる。$z_1=z_2$ と $s_1=s_2 \neq 0$ より $\cos\theta_1=\cos\theta_2$ が従う。θ_i の範囲は $0 \leqq \theta_i \leqq \pi$ であり，この範囲で $\cos\theta$ は単調なので $\theta_1=\theta_2$ となる。$\theta_i \neq 0,\pi$ なので $\sin\theta_i \neq 0$ である。これより $\cos\varphi_1=\cos\varphi_2$，$\sin\varphi_1=\sin\varphi_2$ が従い，$\varphi_1=\varphi_2$ が分かる。

(4) ヤコビアンは $s^2\sin\theta$ なので $s=0$ または $\theta=0,\pi$ で 0 になる。

(5)

$$\begin{aligned}
K &= \iiint_D \mu dxdydz = \iiint_E \mu s^2\sin\theta dsd\theta d\varphi \\
&= \mu\int_0^r \left\{\int_0^\pi \left\{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} s^2\sin\theta d\varphi\right\} d\theta\right\} ds = \frac{2\mu\pi r^3}{3}
\end{aligned}$$

(6)

$$M_x = \iiint_D \mu x dxdydz = \iiint_E \mu s^3\sin^2\theta\cos\varphi dsd\theta d\varphi = \frac{\mu\pi r^4}{4}$$

(7) $M_y=0, M_z=0$ なので

$$(c_x,c_y,c_z)=\left(\frac{3}{8}r, 0, 0\right)$$

学科		在籍番号		氏名	