数理解析 II 第 2 回試験

2005–2–22　　河野

注意: 「答」そのものは採点の対象にはしない。「答」に至る過程を採点の対象にする。したがって，答案は単に「答」を書くだけでなく,「答」に至るまでの経緯を論理的に論述する事。

答案作成は数式も含め作文であるから，主語・述語・テニヲハ・句読点等に十分注意する事。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

卒業を目指している 4 年生及び卒研着手を目指している 3 年生へ：該当の学生は解答の最初に目立つようにその旨を書いて下さい。該当の学生の解答を先に採点します。

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\displaystyle\iint_D xydxdy$ を定義に基づいて計算することを考える。ただし $D = \{0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1\}$ とする。

(1) $z = f(x, y) = xy$ が長方形領域 D で定積分可能である事の定義を述べよ。

(2) Δ_n を n 等分割とする。即ち $\Delta_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n; y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ とするとき，$x_i = \dfrac{i}{n}, y_j = \dfrac{j}{n}$ とする。このとき $S(\Delta_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sup\{\, f(x, y) \mid \ x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j\,\}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ を計算せよ。ただし $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ は既知としてよい。

(3) $\displaystyle\iint_D xydxdy$ を定義に基づいて計算せよ。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の重積分について考える。ただし $D = \left\{x^2 + |y| \leqq 1, x \geqq 0\right\}$ とする。

$$I = \iint_D xy^2 dxdy$$

(1) 領域 D を図示せよ。
(2) 重積分 I を累次積分で表せ (計算を実行しなくてもよい)。
(3) I を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の重積分において $u=x+y, v=x-y$ とおいて変数変換を考える。

$$I=\iint_D |\sin(x+y)|dxdy \qquad D=\{x\geqq 0, y\geqq 0, x+y\leqq 2\pi\}$$

(1) 領域 D を図示せよ。
(2) D に対応する (u,v)–平面の領域 E を求め図示せよ。
(3) ヤコビアン $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ を求めよ。
(4) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ。
(5) 変数変換が可能なための条件を述べ，今の場合その条件が満たされている事を示せ。
(6) 変数変換を実行し，I を u,v に関する重積分の形で書け。
(7) I を求めよ。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の累次積分を計算する事を考える。

$$I = \int_1^e \left\{ \int_0^{\log x} \frac{1+y}{x} dy \right\} dx$$

(1) 累次積分を重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1+y}{x} dxdy$ の形に変形する。このときの積分領域 D を図示せよ。

(2) この重積分を x を先に計算する累次積分に変形せよ。

(3) I を求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 一様な密度 μ を持つ半径 r の半球 $D = \left\{x^2 + y^2 + z^2 \leqq r^2, x \geqq 0\right\}$ の重心を求める事を考える。D の質量 K は

$$K = \iiint_D \mu dxdydz$$

で与えられる。これを計算するため，$x = s\sin\theta\cos\varphi, y = s\sin\theta\sin\varphi, z = s\cos\theta$ と極座標に変換する。ただし極座標なので $s \geqq 0$ とする。

(1) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(s,\theta,\varphi)}$ を求めよ。ただし行列式の計算過程もきちんと書くこと。

(2) D に対応する (s,θ,φ)–空間の領域 E を求めよ。

(3) この対応で一対一でない E の領域を求めよ。

(4) ヤコビアンが 0 になる E の領域を求めよ。

(5) K を求めよ。

(6) D の x に関するモーメント M_x は $\iiint_D x\mu dxdydz$ で与えられる。M_x を求めよ。

(7) D の重心 (c_x, c_y, c_z) を求めよ。

学科		在籍番号		氏名	