数理解析 I 第 1 回試験

2005–6–21　　河野

注意: 「答」そのものは採点の対象にはしない。「答」に至る過程を採点の対象にする。したがって，答案は単に「答」を書くだけでなく,「答」に至るまでの経緯を論理的に論述する事。

答案作成は数式も含め作文であるから，主語・述語・テニヲハ・句読点等に十分注意する事。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 次の命題の否定命題をつくれ。またその否定命題が正しいかどうか，理由をつけて答えよ。

任意の自然数 n に対し，ある自然数 m が存在して $m > n$ が成立する。

否定命題は

ある自然数 n が存在し，任意の自然数 m に対し $m \leqq n$ が成立する。

です。

この否定命題が正しいとすると，n に対し m として (m は任意でいいので) $n+1$ を採用すると $n+1 \leqq n$ が成立する。これは矛盾なので否定命題は正しくない。

命題を否定するとき「$\cdots m \leqq n$ が成立しない。」としているものが少なくない数で存在した。否定するのだから「$\cdots m \leqq n$ が成立する。」または「$\cdots m > n$ が成立しない。」のいずれかです。

2 関数 $y = \cos x$ を定義に基づいて微分せよ。ただし次の極限値は用いてよい。

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1 \qquad \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$\begin{aligned}
(\cos x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\
&= \cos x \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} \\
&= \cos x \lim_{h\to 0}\frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} - \sin x \times 1 \\
&= \cos x \lim_{h\to 0}\frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} - \sin x = \cos x \lim_{h\to 0}\frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} - \sin x \\
&= -\cos x \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{\cos h + 1} - \sin x \\
&= -\cos x \times 1 \times 0 - \sin x \\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次のようにパラメータ表示された曲線の概形を書け。

$$x = x(t) = t - t^3, \qquad y = y(t) = 1 - t^4$$

$x' = x'(t) = 1 - 3t^2$ なので $x'(t) = 0$ となるのは $t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ である。$y' = y'(t) = -4t^3$ なので $y'(t) = 0$ となるのは $t = 0$ である。よって増減表は次のようになる。

t		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
x'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
曲線	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\leftarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$

x–軸との交わりは，$y(t) = 1 - t^4 = 0$ を解くと得られる。$t = \pm 1$ となる。y–軸との交わりは，$x(t) = t - t^3 = 0$ を解くと得られる。$t = 0, \pm 1$ となる。このことに考慮して図を描くと左図の様になる。

$\boxed{\mathbf{4}}$ $z = x + y, s = x^2 + y^2, t = xy$ について次の問に答えよ。

(1) $\dfrac{D(s,t)}{D(x,y)}$ を求めよ。

$$\frac{D(s,t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial s}{\partial x} & \dfrac{\partial s}{\partial y} \\ \dfrac{\partial t}{\partial x} & \dfrac{\partial t}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} \text{ である。}$$

(2) $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ を求めよ。

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \left(\frac{D(s,t)}{D(x,y)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2(x^2 - y^2)} \begin{pmatrix} x & -2y \\ -y & 2x \end{pmatrix}$$

逆行列の計算を間違った人へ：A の逆行列 B が求まったとき，検算として AB を計算する。この結果が単位行列であれば，計算は正しいし，そうでなければ間違っている。

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ を求めよ。

(2) より $\dfrac{\partial x}{\partial s} = \dfrac{x}{2(x^2 - y^2)}, \dfrac{\partial y}{\partial s} = \dfrac{-y}{2(x^2 - y^2)}$ が分かるので，

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = 1 \times \frac{x}{2(x^2 - y^2)} + 1 \times \frac{-y}{2(x^2 - y^2)} \\ &= \frac{x - y}{2(x^2 - y^2)} = \frac{1}{2(x + y)} \end{aligned}$$

となる

(4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}$ を求めよ。

$w = \dfrac{\partial z}{\partial w}$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} &= \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \\ &= -\frac{1}{4(x + y)^3} \end{aligned}$$

となる。

$\boxed{\mathbf{5}}$ $y=e^x$ の $x=2$ におけるテーラー級数を求めよ。

$y=f(x)=e^x$ とおくと $f'(x)=e^x$ なので任意の n に対し $f^{(n)}(x)=e^x$ となる。$e^2=f(2)=f'(2)=f''(2)=\cdots=f^{(n)}(2)=\cdots$ なので

$$e^x=e^2+e^2(x-2)+\frac{1}{2}e^2(x-2)^2+\cdots+\frac{1}{n!}e^2(x-2)^n+\cdots$$

となる。

$\boxed{\mathbf{6}}$ $z=e^{-(x^2+y^2)}\left(ax^2+by^2\right)$ $(a>b>0)$ の極値と極値をとる点を求めよ。

$z_x=-2xe^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)+2e^{-(x^2+y^2)}ax, z_y=-2ye^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)+2e^{-(x^2+y^2)}by$ なので連立方程式 $z_x=0, z_y=0$ を解く。$z_x=0$ より $x(a-ax^2-by^2)=0$ を得る。よって $x=0$ または $a=ax^2+by^2$ である。$z_y=0$ より $y(b-ax^2-by^2)=0$ を得る。よって $y=0$ または $b=ax^2+by^2$ である。
$x=0$ のとき $y=0$ は解であるが，$y\neq 0$ とすると $b=ax^2+by^2$ が成立しているこのとき $b=by^2$ となるので $y=\pm 1$ となる。
$x\neq 0$ のとき $a=ax^2+by^2$ が成立している。$a\neq b$ なので $b=ax^2+by^2$ は成立しない。よって $y=0$ となる。このとき $a=ax^2$ となり $x=\pm 1$ となる。
以上により臨界点は

$$(x,y)=(0,0),(0,\pm 1),(\pm 1,0)$$

となる。

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} 2e^{-(x^2+y^2)}(-5ax^2-by^2+2x^4a+2x^2by^2+a) & 4xye^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2-b-a) \\ 4xye^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2-b-a) & 2e^{-(x^2+y^2)}(-ax^2-5by^2+2y^2ax^2+2y^4b+b) \end{vmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned}
B(0,0) &= \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{vmatrix}=4ab>0 \\
B(0,1) &= \begin{vmatrix} \frac{2(a-b)}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{4b}{e} \end{vmatrix}=-\frac{8(a-b)b}{e^2}<0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(0,-1) &= \begin{vmatrix} \frac{2(a-b)}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{4b}{e} \end{vmatrix}=-\frac{8(a-b)b}{e^2}<0 \\
B(1,0) &= \begin{vmatrix} -\frac{4a}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2(b-a)}{e} \end{vmatrix}=-\frac{8(b-a)a}{e^2}>0 \\
B(-1,0) &= \begin{vmatrix} -\frac{4a}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2(b-a)}{e} \end{vmatrix}=-\frac{8(b-a)a}{e^2}>0
\end{aligned}$$

となる。よって z は $(x,y)=(0,0)$ で極小値 $z(0,0)=0$，$(x,y)=(\pm 1,0)$ で極大値 $z(\pm 1,0)=\dfrac{a}{e}$ をとる。

裏にも問題有り

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{7}}$ 3 辺の和が一定の 3 角形の中で面積が最大なものが存在する事を示し，それを求めよ。

ここではヘロンの公式を用いて解こう。ヘロンの公式：3 角形の 3 辺の長さを a, b, c とするとき，$s = \dfrac{a+b+c}{2}$ とおくとき，3 角形の面積 S は $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ となる。

3 角形の各辺の長さを x, y, z とする。3 辺の長さの和は一定であるのでこれを $2s$ とおく，即ち $x+y+z = 2s$ $(s > 0)$ が成立している。x, y, z は辺の長さであるから $x > 0, y > 0, z > 0$ を満たしている。x, y, z が 3 角形の 3 辺をなすためには 3 角不等式，即ち $x+y > z, y+z > x, z+x > y$ が成立している事が必要である。逆にこれらの不等式が成立しているとき，3 辺の長さが x, y, z であるような 3 角形が存在する。z を消去して x, y の不等式から $x < s, y < s, x+y > s$ が得られる。
逆にこの 3 つの不等式をみたす x, y は最初の 6 つの不等式を満たすことを示す。$x+y > s > y$ より $x+y > y$，よって $x > 0$ を得る。$x+y > s > x$ より $x+y > x$，よって $y > 0$ を得る。$s > x, s > y$ より $2s > x+y$ となるが，$z = 2s-(x+y) > 0$ を得る。$x < s$ を 2 倍すると $2x < 2s$ となる。$2x-x < 2s-(x+y)+y$ なので $x < z+y$ を得る。$y < s$ を 2 倍すると $2y < 2s$ となる。$2y-y < 2s-(x+y)+x$ なので $y < z+x$ を得る。$x+y > s$ を 2 倍すると $2x+2y > 2s$ となる。$x+y > 2s-(x+y)$ なので $x+y > z$ を得る。
$\overline{D} = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; x \leqq s, y \leqq s, x+y \geqq s \right\}$ とおく。ここで S が最大のとき S^2 が最大であり，逆も成立する。よって $f(x, y) = S^2 = s(s-x)(s-y)(x+y-s)$ とおき，$\overline{D}$ 上で $f(x, y)$ の最大値を求める。$\overline{D}$ は有界閉集合であり，$f(x, y)$ は $\overline{D}$ 上の連続関数なので最大値が存在する。境界上または内部の点が最大値を与える。境界上では関数は $f(x, y) = 0$ となる。内部で最大値をとる点は (広義の) 極値になっている。臨界点を求める。$f_x = s(s-x)(s-y) - s(s-y)(x+y-s) = 0$, $f_y = s(s-x)(s-y) - s(s-x)(x+y-s) = 0$ より $(x, y) = (0, s).(s, 0), (s, s), \left(\dfrac{2s}{3}, \dfrac{2s}{3}\right)$ が得られる。この中に最大値を与える点が存在するので，それは $(x, y) = \left(\dfrac{2s}{3}, \dfrac{2s}{3}\right)$ である。以上により最大値を与える 3 角形は**正 3 角形**である。

$\boxed{\mathbf{8}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (10)。