数理解析 I 第 2 回試験

2005–8–1　河野

注意:　答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正解でも満点とならないことがある。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

$\boxed{1}$ 関数 $z = f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}\left(ax^2+by^2\right)$ $(a > b > 0)$ について次の問に答えよ。

(1) $z = f(x,y)$ の臨界点を求めよ。

(2) $z = f(x,y)$ の極値と極値をとる点を求めよ。

(1) $z_x = -2xe^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2) + 2e^{-(x^2+y^2)}ax, z_y = -2ye^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2) + 2e^{-(x^2+y^2)}by$ なので連立方程式 $z_x = 0, z_y = 0$ を解く。$z_x = -2xe^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2) + 2e^{-(x^2+y^2)}ax = 2e^{-(x^2+y^2)}x\left\{a-(ax^2+by^2)\right\} = 0$ より $x = 0$ または $a-(ax^2+by^2) = 0$ が成立する。$z_y = -2ye^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2) + 2e^{-(x^2+y^2)}by = 2e^{-(x^2+y^2)}y\left\{b-(x^2+y^2)\right\} = 0$ より $y = 0$ または $b-(ax^2+by^2) = 0$ が成立する。

$x = 0$ のとき $y = 0$ は解になっている。

$x = 0$ かつ $y \neq 0$ のとき $b-(ax^2+by^2) = 0$ が成立するので $b = by^2$ となる。$b \neq 0$ なので $y^2 = 1$ より $y = \pm 1$ を得る。

$x \neq 0$ のときは $a-(ax^2+by^2) = 0$ が成立している。$a \neq b$ より $b-(ax^2+by^2) \neq 0$ なので $y = 0$ が成立する。これを代入して $a = ax^2$ を得るが，$a \neq 0$ なので $x^2 = 1$，即ち $x = \pm 1$ となる。

以上により臨界点は

$$(x,y) = (0,0), (0,\pm 1), (\pm 1, 0)$$

となる。

(2) ヘッシャンは

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 2e^{-(x^2+y^2)}(-5ax^2-by^2+2x^4a+2x^2by^2+a) & 4xye^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2-b-a) \\ 4xye^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2-b-a) & 2e^{-(x^2+y^2)}(-ax^2-5by^2+2y^2ax^2+2y^4b+b) \end{vmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned}
B(0,0) &= \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{vmatrix} = 4ab > 0 \\
B(0,1) &= \begin{vmatrix} \dfrac{2(a-b)}{e} & 0 \\ 0 & -\dfrac{4b}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(a-b)b}{e^2} < 0 \\
B(0,-1) &= \begin{vmatrix} \dfrac{2(a-b)}{e} & 0 \\ 0 & -\dfrac{4b}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(a-b)b}{e^2} < 0 \\
B(1,0) &= \begin{vmatrix} -\dfrac{4a}{e} & 0 \\ 0 & \dfrac{2(b-a)}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(b-a)a}{e^2} > 0 \\
B(-1,0) &= \begin{vmatrix} -\dfrac{4a}{e} & 0 \\ 0 & \dfrac{2(b-a)}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(b-a)a}{e^2} > 0
\end{aligned}$$

となる。また $2a > 0$，$-\dfrac{4a}{e} < 0$ なので z は $(x,y) = (0,0)$ で極小値 $z(0,0) = 0$，$(x,y) = (\pm 1, 0)$ で極大値 $z(\pm 1, 0) = \dfrac{a}{e}$ をとる。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\int xe^{2x^2+3}dx$ を求めよ。

$t = 2x^2 + 3$ とおくと $\dfrac{dt}{dx} = 4x$ となる。よって変数変換を実行すると

$$\begin{aligned}\int xe^{2x^2+3}dx &= \int xe^t \frac{1}{4x}dt \\ &= \frac{1}{4}\int e^t dt \\ &= \frac{1}{4}e^t = \frac{1}{4}e^{2x^2+3}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\int \left(\dfrac{e^x}{x} + e^x \log x\right) dx$ を求めよ。

$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ なので

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{x}dx &= \int e^x(\log x)'dx = e^x \log x - \int (e^x)' \log x dx \\ &= e^x \log x - \int e^x \log x dx\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{e^x}{x} + e^x \log x\right) dx &= \int \frac{e^x}{x}dx + \int e^x \log x dx \\ &= e^x \log x - \int e^x \log x dx + \int e^x \log x dx \\ &= e^x \log x\end{aligned}$$

4 次の不定積分を考える。

$$I = \int \frac{2x^2}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx$$

(1) $\dfrac{2x^2}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}$ を部分分数展開せよ。
(2) 積分 I を求めよ。

(1) $\dfrac{2x^2}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} = \dfrac{2x^2}{(x-1)^2(x^2+1)}$ なので $\dfrac{2x^2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \dfrac{Ax+B}{(x-1)^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ とおき分母を払う。

$$(Ax+B)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2 = 2x^2$$

が恒等的に成立している。
$x = i$ を代入すると左辺は $(Ci+D)(i-1)^2 = (Ci+D)(-2i) = 2C - 2Di$，右辺は $2i^2 = -2$ となるので，$2C - 2Di = -2$，即ち $D = 0, C = -1$ となる。
$x = 0$ を代入すると左辺は $B + D(-1)^2 = B + D$，右辺は 0 となるので $B + D = 0$ となる。$D = 0$ より $B =$ となる。
$x = 1$ を代入すると左辺は $(A+B)(1^2+1) = 2(A+B)$，右辺は 2 となるので，$2(A+B) = 2$ となる。$B = 0$ より $A = 1$ となる。よって

$$\frac{2x^2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{x}{(x-1)^2} - \frac{x}{x^2+1}$$

となる。

(2) $\dfrac{x}{(x-1)^2} = \dfrac{x-1+1}{(x-1)^2} = \dfrac{x-1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$ と展開できるので，

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2x^2}{(x-1)^2(x^2+1)} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx \\ &= \log|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\log(x^2+1) \end{aligned}$$

となる。

裏にも問題有り

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の不定積分を考える。

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$$

(1) $x = \dfrac{1}{\cos t}$ とおいて I を t に関する積分に変形せよ。
(2) $\sqrt{x^2-1} = u + x$ とおいて I を u に関する積分に変形せよ。
(3) $\sqrt{x^2-1} = v(x+1)$ とおいて I を v に関する積分に変形せよ。
(4) 積分 I を求めよ。
(**変数変換の置き方が通常と微妙に違っている点に注意する事。**)

(1) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t}$ である。また $x^2 - 1 = \dfrac{1}{\cos^2 t} - 1 = \dfrac{1}{\cos^2 t} - \dfrac{\cos^2 t}{\cos^2} = \dfrac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t} = \dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \left(\dfrac{\sin t}{\cos t}\right)^2$ となるので,

$$I = \int \frac{\cos t}{\sin t}\frac{\sin t}{\cos^2 t} dt = \int \frac{1}{\cos t} dt$$

となる。

(2) $\sqrt{x^2-1} = u + x$ を 2 乗すると $x^2 - 1 = u^2 + 2ux + x^2$ となるので $x = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{u} + u\right)$ となる。$\dfrac{dx}{du} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1-u^2}{u^2}$ であり,
$u + x = u - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{u} + u\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{u^2-1}{u}$ なので

$$I = \int \frac{2u}{u^2-1}\frac{1}{2}\frac{1-u^2}{u^2} du = -\int \frac{1}{u} du$$

となる。

(3) $v = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+1} = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{(x+1)^2}} = \sqrt{\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}} = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ となる。$v^2 = \dfrac{x-1}{x+1}$ なので，これを変形して $x = \dfrac{1+v^2}{1-v^2}$
となる。$x + 1 = \dfrac{2}{1-v^2}$ であり，$\dfrac{dx}{dv} = \dfrac{4v}{(1-v^2)^2}$ なので

$$I = \int \frac{1}{v}\frac{1-v^2}{2}\frac{4v}{(1-v^2)^2} dv = 2\int \frac{1}{1-v^2} dv$$

となる。

(4) (2) より

$$\begin{aligned}
I &= -\int \frac{1}{u} du = -\log|u| \\
&= -\log\left|\sqrt{x^2-1} - x\right| \\
&= \log\left|\frac{1}{\sqrt{x^2-1} - x}\right| \\
&= \log\left|\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}\right| \\
&= \log\left|\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{-1}\right| \\
&= \log\left|\sqrt{x^2-1}+x\right|
\end{aligned}$$