数理解析 II 第 2 回試験

2006–2–23　　河野

注意:　答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正解でも満点とならないことがある。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

解答をかなり書いた後で間違いに気がついた場合，消しゴムでその解答を消すのではなく，解答の上に大きなバツを書き，その横に自分の間違った理由を書いておくと，**その部分に点数が加算されることがある**ので，そのようにすることを推奨する。

卒業を目指している 4 年生及び卒研着手を目指している 3 年生へ：該当の学生は解答の最初に目立つようにその旨を書いて下さい。該当の学生の解答を先に採点します。

1 $\displaystyle\iint_D xydxdy$ を定義に基づいて計算することを考える。ただし $D = \{0 \leqq x \leqq 2, 0 \leqq y \leqq 1\}$ とする。

(1) $z = f(x,y) = xy$ が長方形領域 D で定積分可能である事の定義を述べよ。

(2) Δ_n を n 等分割とする。即ち $\Delta_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n; y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ とするとき，$x_i = \dfrac{2i}{n}, y_j = \dfrac{j}{n}$ とする。このとき $S(\Delta_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sup\{\, f(x,y) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j \,\}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ を計算せよ。ただし $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ は既知としてよい。

(3) $\displaystyle\iint_D xydxdy$ を定義に基づいて計算せよ。

(1)　$\Delta = \{x_0, x_1 \ldots, x_m\,;\, y_0, y_1 \ldots, y_n\}$ を D の分割とする。すなわち $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = 2, 0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = 1$ とする。各 i, j $(i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n)$ に対し $M_{ij} = \sup\{\, f(x,y) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j \,\}$, $m_{ij} = \inf\{\, f(x,y) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j \,\}$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, $\|\Delta\| = \max\{\, \Delta x_i, \Delta y_j \mid i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n \}$ とおく。$S(\Delta) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j$, $s(\Delta) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j$ とおく。$\displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0} S(\Delta) = \lim_{\|\Delta\|\to 0} s(\Delta)$ となるとき $f(x,y)$ は D で積分可能であるといい，この極限値を

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

で表す。

(2)　$f(x,y)$ は D において x に関しても y に関しても単調増加なので小領域 $\{x_{i-1} \leqq x \leqq x_i,\ y_{j-1} \leqq y \leqq y_j\}$ における最大値は (x_i, y_j) でとり，最小値は (x_{i-1}, y_{j-1}) でとる。よって $M_{ij} = x_i y_j$, $m_{ij} = x_{i-1}y_{j-1}$ である。今 n 等分割 Δ_n に対しては $x_i = \dfrac{2i}{n}$, $y_j = \dfrac{j}{n}$ なので，$M_{ij} = \dfrac{2ij}{n^2}$, $m_{ij} = \dfrac{2(i-1)(j-1)}{n^2}$ となる。$\Delta x_i = \dfrac{2}{n}$, $\Delta y_j = \dfrac{1}{n}$ なので,

$$S(\Delta_n) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{2ij}{n^2}\frac{2}{n}\frac{1}{n} = \frac{4}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} j = \frac{4}{n^4}\frac{n(n+1)}{2}\frac{n(n+1)}{2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

となる。

(3)

$$s(\Delta_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{2(i-1)(j-1)}{n^2}\frac{2}{n}\frac{1}{n} = \frac{4}{n^4}\sum_{i=1}^{n}(i-1)\sum_{j=1}^{n}(j-1) = \frac{4}{n^4}\frac{n(n-1)}{2}\frac{n(n-1)}{2} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$$

であり，$n \to \infty$ のとき $\|\Delta_n\| = \dfrac{2}{n} \to 0$ となるので,

$$\lim_{n\to\infty} S(\Delta_n) = \lim_{n\to\infty} s(\Delta_n) = 1$$

となるので，積分可能であり

$$\iint_D xydxdy = 1$$

となる。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ 曲線 $y = x^2$ と曲線 $y = x + 2$ で囲まれる領域を D とし，重積分

$$I = \iint_D 2dxdy$$

について考える。

(1) 領域 D を図示せよ。

(2) D を縦線領域 ($\{a \leqq x \leqq b, f_1(x) \leqq y \leqq f_2(x)\}$ の形をしている領域) で表せ。

(3) 重積分 I を y に関する積分を先にする形の累次積分で表せ (計算を実行しなくてもよい)。

(4) D を適当な領域 D_1 および D_2 に分割し，それぞれを横線領域 ($\{c \leqq y \leqq d, g_1(y) \leqq x \leqq g_2(y)\}$ の形をしている領域) で表せ。

(5) 重積分 I を x に関する積分を先にする形の累次積分で表せ (計算を実行しなくてもよい)。

(6) I を求めよ。

(1)　左図の様になっている。

(2)

$$D = \{-1 \leqq x \leqq 2,\ x^2 \leqq y \leqq x + 2\}$$

(3)

$$I = \iint_D 2dxdy = \int_{-1}^{2} \left\{ \int_{x^2}^{x+2} 2dy \right\} dx$$

y の動く範囲が $0 \leqq y \leqq 4$ なので，これを

$$\int_{-1}^{2} \left\{ \int_0^4 2dy \right\} dx$$

としていたものがいたが，この間違いの重大性に気づかない限り合格は難しいだろう。

(4)

$$\begin{aligned} D_1 &= \{0 \leqq y \leqq 1,\ -\sqrt{y} \leqq x \leqq \sqrt{y}\} \\ D_2 &= \{1 \leqq y \leqq 4,\ y - 2 \leqq x \leqq \sqrt{y}\} \end{aligned}$$

領域の左側を示す曲線の式が $y \leqq 1$ のときは $y = x^2$，$y \geqq 1$ のときは $y = x + 2$ となっているので，$y = 1$ のところで領域を 2 つに分割した。

(5)

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} 2dxdy + \iint_{D_2} 2dxdy \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} 2dx \right\} dy + \int_1^4 \left\{ \int_{y-2}^{\sqrt{y}} 2dx \right\} dy \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{2} \left\{ \int_{x^2}^{x+2} 2dy \right\} dx \\ &= \int_{-1}^{2} (4 + 2x - 2x^2) dx = 9 \end{aligned}$$

3 次の重積分を考える。

$$I = \iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dxdy \qquad D = \{x^2+y^2 \geqq 1\}$$

I は広義積分なので，$A_n = \{1 \leqq x^2+y^2 \leqq n^2\}$ に対し $I_n = \iint_{A_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dxdy$ とおき計算を実行して行く。

(1) A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ が領域 D の近似増加列であることの定義を述べよ。
(2) A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ を D の近似増加列とするとき広義積分の定義を述べよ。
(3) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおいて変数変換を考える。A_n に対応する (r, θ)–平面の領域 B_n を求め図示せよ。
(4) (r, θ) と (x, y) の対応が一対一ではない B_n の部分集合を求めよ。
(5) 変数変換が可能なための条件を述べ，今の場合その条件が満たされている事を示せ。
(6) 変数変換を実行し，I_n を r, θ に関する重積分の形で書け。
(7) I_n を求めよ。
(8) I を求めよ。

(1)　A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ が次の条件をみたすとき D の近似増加列であるという。
(1)　任意の自然数 n に対し A_n は有界閉集合である。
(2)　任意の自然数 n に対し $A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq D$ が成立する。
(3)　D に含まれる任意の有界閉集合 K に対し，ある n が存在して $K \subseteq A_n$ となる。

(2)　$\lim_{n\to\infty} \iint_{A_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dxdy$ が収束するとき，この広義積分は収束するといい，この極限値を $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dxdy$ と表す。

(3)　$B_n = \{1 \leqq r \leqq n,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\}$ となる。図は $n = 2$ の場合。

(4)　$(r, 0)$ と $(r, 2\pi)$ は (x, y)–平面では同じ点に対応している。それ以外では一対一である。よって一対一でないのは $\{1 \leqq r \leqq n,\ \theta = 0\} \cup \{1 \leqq r \leqq n,\ \theta = 2\pi\}$ である。

(5)　変数変換が可能な条件は 1) 一対一でない領域の面積が 0 であり，2) ヤコビアンが 0 である領域が面積確定，であることである。(4) より一対一でない領域は $\{1 \leqq r \leqq n,\ \theta = 0\} \cup \{1 \leqq r \leqq n,\ \theta = 2\pi\}$ なので面積 0 である。またヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

なので，ヤコビアンが 0 になることはない。よって条件は満たされている。

(6)

$$I_n = \iint_{B_n} \frac{1}{r^4} r dr d\theta = \iint_{B_n} \frac{1}{r^3} dr d\theta$$

となる。

(7)

$$I_n = \iint_{B_n} \frac{1}{r^3} dr d\theta = \int_1^n \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^3} d\theta \right\} dr = 2\pi \int_1^n \frac{1}{r^3} dr = 2\pi \left[-\frac{1}{2r^2} \right]_{r=1}^n = \pi \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

となる。

(8)

$$I = \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \pi \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \pi$$

となる。

裏にも問題あり。

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{4}}$ 半径 R の半球 $D=\left\{x^2+y^2+z^2 \leqq R^2, x \geqq 0\right\}$ の体積を求める事を考える。体積 V は

$$V=\iiint_D dxdydz$$

で与えられる。これを計算するため，$x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta$ と極座標に変換する。ただし極座標なので $r \geqq 0$ とする。

(1) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}$ を求めよ。ただし行列式の計算過程もきちんと書くこと (変数の順序が通常の並び順と異なっていることに注意)。

(2) D に対応する (r,θ,φ)–空間の領域 E を求めよ。

(3) この対応で一対一でない E の領域を求めよ。

(4) ヤコビアンが 0 になる E の領域を求めよ。

(5) V を r,θ,φ に関する 3 重積分で表せ。

(6) V を求めよ。ただし途中計算が間違っているのに，球の体積から V を求めるような解答は減点対象なので白紙より低い点になる場合がある。

(1)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} &= \begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\
&= r^2\sin^3\theta\sin^2\varphi + r^2\sin\theta\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^3\theta\cos^2\varphi \\
&= r^2\sin^3\theta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right) + r^2\sin\theta\cos^2\theta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right) \\
&= r^2\sin^3\theta + r^2\sin\theta\cos^2\theta = r^2\sin\theta\left(\sin\theta^2+\cos^2\theta\right) = r^2\sin\theta
\end{aligned}$$

(2) $x^2+y^2+z^2 = r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta = r^2\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right) + r^2\cos^2\theta = r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta = r^2$ より $r \leqq R$ となる。$0 \leqq \theta \leqq \pi$ なので $\sin\theta \geqq 0$ となっている。このとき $x = r\sin\theta\cos\varphi \geqq 0$ より $\cos\varphi \geqq 0$ となる。よって $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2}$ となる。以上により

$$E=\left\{0 \leqq r \leqq R,\ 0 \leqq \theta \leqq \pi,\ -\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}\right\}$$

となる。

(3) (r,θ,φ) と (r',θ',φ') が同じ点 (x,y,z) に対応しているとする。$r^2=x^2+y^2+z^2=r'^2$ より $r=r'$ となる。$r=0$ のときは θ,φ の値によらず $(x,y,z)=(0,0,0)$ となるので一対一でない。よって以下 $r \neq 0$ とする。このとき $\cos\theta = \dfrac{z}{r} = \cos\theta'$ であり，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ なので $\theta=\theta'$ となる。$\sin\theta \neq 0$ のときは $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2}$ および $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \varphi' \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $\varphi=\varphi'$ となる。よってこのときは一対一である。$\sin\theta=0$ のときは φ の値によらず同じ点に対応するので一対一でない。このとき $\theta=0$ または $\theta=\pi$ である。以上により一対一でない点の集合は

$$\{r=0\} \cup \{\theta=0\} \cup \{\theta=\pi\}$$

である。集合の記号のなかのカンマは「かつ」と考えるので,「または」は和集合を用いて表した。

(4) ヤコビアンは $r^2\sin\theta$ なので $r=0$ または $\theta=0$ または $\theta=\pi$ のとき 0 になる。よって

$$\{r=0\} \cup \{\theta=0\} \cup \{\theta=\pi\}$$

である。

(5)

$$V = \iiint_E r^2\sin\theta\, dr d\theta d\varphi$$

となる。

(6)

$$V = \iiint_E r^2\sin\theta\, dr d\theta d\varphi = \int_0^R \left\{\int_0^\pi \left\{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\sin\theta\, d\varphi\right\} d\theta\right\} dr = \frac{2}{3}\pi R^3$$