解析学 I 第 1 回試験

2006–12–15　　河野

注意:　答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 関数 $y = \cos x$ を定義に基づいて微分せよ。ただし次の極限値は用いてよい。

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \qquad \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}\end{aligned}$$

が成立する。

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} = -\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \frac{\sin h}{\cos h + 1} = 0\end{aligned}$$

より

$$(\cos x)' = -\sin x$$

となる。

2 関数 $y = e^{x^3} \sin(2x^2 + 1)$ の導関数を求めよ。諸公式を用いてよい。

$$\begin{aligned}\left(e^{x^3} \sin(2x^2+1)\right)' &= \left(e^{x^3}\right)' \sin(2x^2+1) + e^{x^3} \left(\sin(2x^2+1)\right)' \\ &= 3x^2 e^{x^3} \sin(2x^2+1) + 4x e^{x^3} \cos(2x^2+1)\end{aligned}$$

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{3}}$ $z = f(x,y) = x, s = x+y, t = xy$ について次の問に答えよ。

(1) $\dfrac{D(s,t)}{D(x,y)}$ を求めよ。

$$\frac{D(s,t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial s}{\partial x} & \dfrac{\partial s}{\partial y} \\ \dfrac{\partial t}{\partial x} & \dfrac{\partial t}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$$

(2) $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ を求めよ。

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \left(\frac{D(s,t)}{D(x,y)}\right)^{-1} = \frac{1}{x-y}\begin{pmatrix} x & -1 \\ -y & 1 \end{pmatrix}$$

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ を求めよ。

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \\ &= 1 \times \frac{x}{x-y} + 0 \times \frac{-y}{x-y} \\ &= \frac{x}{x-y} \end{aligned}$$

(4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}$ を求めよ。

$w = \dfrac{\partial z}{\partial s}$ とおくと

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right) = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

が成立している。

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{-y}{(x-y)^2}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{x}{(x-y)^2}$$

より

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} &= \frac{-y}{(x-y)^2}\frac{x}{x-y} + \frac{x}{(x-y)^2}\frac{-y}{x-y} \\ &= \frac{-2xy}{(x-y)^3} \end{aligned}$$

となる。

$\boxed{\mathbf{4}}$ $z = f(x, y) = x^3 - 3x + x^2y^2$ について次の問いに答えよ。

(1) $z = f(x, y)$ の臨界点 ($\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ かつ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ となる点) を求めよ。

(2) $z = f(x, y)$ の極値及び極値をとる点を求めよ。

(1) 臨界点 (x, y) は $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3 + 2xy^2 = 0$ かつ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y = 0$ を満たす点なので，まず $2x^2y = 0$ より $x = 0$ または $y = 0$ である。$x = 0$ を $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ に代入すると $-3 = 0$ となるのでそのような x, y は存在しない。$y = 0$ を $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ に代入すると $3x^2 - 3 = 0$ より $x = \pm 1$ を得る。以上により臨界点は $(x, y) = (1, 0)$ または $(-1, 0)$ である。

(2)

$$z_x = 3x^2 - 3 + 2xy^2, \quad z_y = 2x^2y$$

より

$$z_{xx} = 6x + 2y^2, \quad z_{xy} = 4xy, \quad z_{yy} = 2x^2$$

である。ヘッシャンは $H(x, y) = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2$ なので $H(1, 0) = 12 > 0$ であり，$H(-1, 0) = -12 < 0$ である。よって $(-1, 0)$ は極値ではない。$z_{xx}(1, 0) > 0$ なので z は $(1, 0)$ で極小値 -2 をとる。

裏にも問題有り

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{5}}$ $y = f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ の $x=0$ におけるテーラー級数次の順で求めよ。

(1) $f'(x), f''(x), f^{(3)}(x)$ を求めよ。

(2) $f^{(n)}(x)$ の形を予想し数学的帰納法により証明せよ。

(3) $y = f(x)$ を $x=0$ においてテーラー級数展開せよ。

(1) $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$, $f^{(3)}(x) = \dfrac{6}{(1-x)^4}$ となる。

(2) $f^{(n)} = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ と予想される。

(a) $n=1$ のときは成立している。

(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)} = \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ とする。

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left(k!(1-x)^{-(k+1)}\right)' \\ &= -(k+1)k!(1-x)^{-(k+1)-1}(-1) \\ &= \frac{(k+1)!}{(1-x)^{(k+1)+1}} \end{aligned}$$

となり $n=k+1$ でも成立している。

(3)

$$f(0)=1, f'(0)=1, f''(0)=2, \ldots, f^{(n)}(0)=n!, \ldots$$

なので

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (10)。