解析学 I 第 2 回試験

2007–2–9　　河野

注意:　答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

解答をかなり書いた後で間違いに気がついた場合，消しゴムでその解答を消すのではなく，解答の上に大きなバツを書き，その横に自分の間違った理由を書いておくと，**その部分に点数が加算されることがある**ので，そのようにすることを推奨する。

卒業を目指している 4 年生及び卒研着手を目指している 3 年生へ：該当の学生は解答の最初に目立つようにその旨を書いて下さい。該当の学生の解答を先に採点します。

1 $\displaystyle\int x^2(x^3+5)^6dx$ を求めよ。

$t = x^3+5$ とおくと $\dfrac{dt}{dx} = 3x^2$ なので $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{3x^2}$ である。よって

$$\begin{aligned}\int x^2(x^3+5)^6dx &= \int x^2t^6\frac{1}{3x^2}dt = \frac{1}{3}\int t^6dt \\ &= \frac{1}{21}t^7 = \frac{1}{21}(x^3+5)^7\end{aligned}$$

2 $\displaystyle\int \frac{2x^2-2x+1}{x(x-1)^2}dx$ を求めよ。

部分分数展開するために $\dfrac{2x^2-2x+1}{x(x-1)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{(x-1)^2}$ とおくと，恒等的に

$$2x^2-2x+1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx = (A+B)x^2 + (C-2A-B)x + A$$

が成立するので $A=1, B=1, , C=1$ となる。よって

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2-2x+1}{x(x-1)^2}dx &= \int \left\{\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right\}dx \\ &= \log|x| + \log|x-1| - \frac{1}{x-1}\end{aligned}$$

裏にも問題有り

学科		在番籍号		氏名	

$\boxed{\mathbf{3}}$ 不定積分

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

を次にしたがって求めよ。

(1) $\sqrt{x^2+1}+x=t$ とおくとき x を t を用いて表せ。

(2) $t-x$ を t を用いて表せ。

(3) $\dfrac{dx}{dt}$ を求めよ。

(4) 積分 I を求めよ。

(1) $\sqrt{x^2+1}=t-x$ を 2 乗して $x^2+1=t^2-2tx+x^2$ を得る。これを整理して

$$x = \frac{t^2-1}{2t}$$

を得る。

(2) $t-x = t-\dfrac{t^2-1}{2t} = \dfrac{t^2+1}{2t}$ となる。

(3) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t^2+1}{2t^2}$

(4)

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{1}{t-x}\frac{dx}{dt}\,dt \\ &= \int \frac{2t}{t^2+1}\,\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt \\ &= \log|t| = \log|\sqrt{x^2+1}+x| \end{aligned}$$

4 次の微分方程式を解け。

$$\frac{dy}{dx} - 3y = x$$

ただし $D - \lambda = e^{\lambda x} D e^{-\lambda x}$ という関係式を用いてもよい。

次の式が成立する。

$$\begin{aligned}\int xe^{Ax}dx &= \int x\left(\frac{1}{A}e^{Ax}\right)' dx = \frac{1}{A}xe^{Ax} - \frac{1}{A}\int e^{Ax}dx \\ &= \frac{1}{A}xe^{Ax} - \frac{1}{A^2}e^{Ax}\end{aligned}$$

微分方程式は微分演算子 D を用いて $(D-3)y = x$ と表される。$D-3 = e^{3x}De^{-3x}$ が成立するので，$e^{3x}De^{-3x}y = x$ より $De^{-3x}y = e^{-3x}x$ を得る。両辺を積分して

$$e^{-3x}y = \int e^{-3x}xdx = -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + C$$

を得る。よって一般解として

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{9} + Ce^{3x}$$

を得る。

5 次の微分方程式を解け。

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = x$$

$t^2 + t + 1 = 0$ の 2 解は

$$\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \beta = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

である。このとき

$$t^2 + t + 1 = (t-\alpha)(t-\beta) = t^2 - (\alpha+\beta)t + \alpha\beta$$

が成立するので $\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 1$ が成立する。
$D^2 + D + 1 = (D-\alpha)(D-\beta)$ なので微分方程式は

$$(D-\alpha)(D-\beta)y = x$$

となる。$u = (D-\beta)y$ とおくと

$$e^{\alpha x}De^{-\alpha x}u = x$$

となる。$De^{-\alpha x}u = e^{-\alpha x}x$ の両辺を積分すると

$$e^{-\alpha x}u = \int e^{-\alpha x}xdx = -\frac{1}{\alpha}xe^{-\alpha x} - \frac{1}{\alpha^2}e^{-\alpha x} + C_1$$

を得る。(次ページへ続く)

学科		在籍番号		氏名	

よって

$$u = -\frac{1}{\alpha}x - \frac{1}{\alpha^2} + C_1 e^{\alpha x}$$

となる。$u = (D-\beta)y = e^{\beta x} D e^{-\beta x} y$ なので

$$De^{-\beta x}y = -\frac{1}{\alpha}xe^{-\beta x} - \frac{1}{\alpha^2}e^{-\beta x} + C_1 e^{(\alpha-\beta)x}$$

の両辺を積分すると

$$\begin{aligned}
e^{-\beta x}y &= -\frac{1}{\alpha}\int xe^{-\beta x}dx - \frac{1}{\alpha^2}\int e^{-\beta x}dx + C_1\int e^{(\alpha-\beta)x}dx \\
&= -\frac{1}{\alpha}\left(-\frac{1}{\beta}xe^{-\beta x} - \frac{1}{\beta^2}e^{-\beta x}\right) - \frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{-\beta}e^{-\beta x} + \frac{C_1}{\alpha-\beta}e^{(\alpha-\beta)x} + C_2 \\
&= \frac{1}{\alpha\beta}xe^{-\beta x} + \left(\frac{1}{\alpha\beta^2} + \frac{1}{\alpha^2\beta}\right)e^{-\beta x} + \frac{C_1}{\alpha-\beta}e^{(\alpha-\beta)x} + C_2 \\
&= \frac{1}{\alpha\beta}xe^{-\beta x} + \frac{\alpha+\beta}{\alpha^2\beta^2}e^{-\beta x} + \frac{C_1}{\alpha-\beta}e^{(\alpha-\beta)x} + C_2
\end{aligned}$$

となる。ここで $\alpha+\beta = -1, \alpha\beta = 1$ を用いると

$$e^{-\beta x}y = xe^{-\beta x} - e^{-\beta x} + \frac{C_1}{\alpha-\beta}e^{(\alpha-\beta)x} + C_2$$

となる。$\dfrac{C_1}{\alpha-\beta}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解

$$y = x - 1 + C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

を得る。