解析学I第1回試験

2007–12–17　　河野

注意: ・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。再履修者以外は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 $y=f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ を定義に基づき微分せよ。

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{(x+h)^2+1}-\dfrac{1}{x^2+1}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{(x^2+1)-\big((x+h)^2+1\big)}{\big((x+h)^2+1\big)(x^2+1)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{x^2+1-x^2-2xh-h^2-1}{\big((x+h)^2+1\big)(x^2+1)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{-2xh-h^2}{\big((x+h)^2+1\big)(x^2+1)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-2x-h}{\big((x+h)^2+1\big)(x^2+1)} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}
$$

2 $y=\sin\left(x^2\log x+x^3e^x\right)$ を微分せよ。

$$
y' = \left(2x\log x + x + 3x^2e^x + x^3e^x\right)\cos\left(x^2\log x + x^3e^x\right)
$$

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{3}}$ $y=f(x)=\log x$ を $x=1$ でテーラー展開することを考える。次の問いに答えながら，テーラー展開を求めよ。

(1) $f'(x)$ および $f''(x)$，$f^{(3)}(x)$ を求めよ。

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，$f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$，$f'''(x)=\dfrac{2}{x^3}$ となる。

(2) 自然数 n に対し $f^{(n)}(x)$ を予想し，それが正しいことを数学的帰納法で証明せよ。

$f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n}$ と予想し，これを数学的帰納法で証明する。

$n=1$ のとき

$$f'(x)=\frac{1}{x}=\frac{(-1)^{1+1}(1-1)!}{x}$$

であり成立している。

$n=k$ のとき成立を仮定する，即ち $f^{(k)}(x)=\dfrac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{x^k}$ を仮定する。このとき $f^{(k)}(x)$ を x で微分すると

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(\frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{x^k}\right)' = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!(-k)}{x^{k+1}} \\ &= \frac{(-1)^{k+2}k!}{x^{k+1}} \end{aligned}$$

となるので $n=k+1$ のときも成立していることが分かる。数学的帰納法によりすべての自然数に対し成立することが示された。

(3) $y=f(x)=\log x$ を $x=1$ でテーラー展開せよ。

テーラー級数を

$$f(x)=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_n(x-1)^n+\cdots$$

とすると $a_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(1)$ となっているので，$n>0$ のとき $a_n=\dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!}=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ となる。また $a_0=f(1)=0$ なので

$$f(x)=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}(x-1)^n+\cdots$$

となる。

4

$$z = x + y, s = x\cos y, t = x\sin y$$

について次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{D(s,t)}{D(x,y)}$ を求めよ。

$$\frac{D(s,t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{pmatrix}$$

(2) $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ を求めよ。

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \left(\frac{D(s,t)}{D(x,y)}\right)^{=1} = \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\dfrac{\sin y}{x} & \dfrac{\cos y}{x} \end{pmatrix}$$

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ を求めよ。

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \\ &= 1 \cdot \cos y + 1 \cdot \left(-\frac{\sin y}{x}\right) \\ &= \cos y - \frac{\sin y}{x} \end{aligned}$$

(4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}$ を求めよ。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)\frac{\partial y}{\partial s} \\ &= \frac{\sin y}{x^2}\cos y + \left(-\sin y - \frac{\cos y}{x}\right)\left(-\frac{\sin y}{x}\right) \\ &= \frac{2\sin y\cos y}{x^2} + \frac{\sin^2 y}{x} \end{aligned}$$

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{5}$ $z = f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ について次の問いに答えよ。

(1) $z = f(x,y)$ の臨界点 ($\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ かつ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ となる点) を求めよ。

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0$ より $y = x^2$ を得る。これを $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -3x + 3y^2 = 0$ に代入すると，$x^4 - x = 0$ を得る。

$$x^4 - x = x(x^3 - 1) = x(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

が成立するが，$x^2 + x + 1 \neq 0$ なので $x = 0$ または $x = 1$ である。$y = x^2$ より，$x = 0$ のとき $y = 0$ であり，$x = 1$ のとき $y = 1$ である。よって臨界点は $(x,y) = (0,0)$ または $(1,1)$ である。

(2) $z = f(x,y)$ の極値及び極値をとる点を求めよ。

ヘッシアンを計算すると

$$\begin{aligned} H(x,y) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}^{2} \\ &= 36xy - 9 \end{aligned}$$

となる。$H(0,0) = -9 < 0$ なので z は $(0,0)$ で極値をとらない。$H(1,1) = 27 > 0$ なので z は $(1,1)$ で極値をとる。$z(1,1) = -1$ なので，関数 z は $(x,y) = (1,1)$ でのみ極値をとり，その値は -1 である。

6 「$f(x,y)$ が C^2 級 (2 階の偏導関数が存在して連続) ならば $f_{xy}=f_{yx}$ である。」ということは知られている。このことを用いて次を次を示せ。

(1) $z=f(x,y)$ が C^3 級ならば

$$z_{xxy}=z_{xyx}=z_{yxx}, \quad z_{yyx}=z_{yxy}=z_{xyy}$$

が成立する。

z が C^3 級のとき，z_x および z_y は C^2 級である。z_x に命題を適用すると $z_{xxy}=\left(z_x\right)_{xy}=\left(z_x\right)_{yx}=z_{xyz}$ が得られる。z_y に命題を適用すると $z_{yxy}=\left(z_y\right)_{xy}=\left(z_y\right)_{yx}=z_{yyz}$ となる。

z は C^3 級であるから，C^2 級でもある。よって $z_{xy}=z_{yx}$ が成立する。以上より

$$z_{xyx}=\left(z_{xy}\right)_x=\left(z_{yx}\right)_x=z_{yxx}, \quad z_{xyy}=\left(z_{xy}\right)_y=\left(z_{yx}\right)_y=z_{yxy}$$

となる。

(2) $z=f(x,y)$ が C^n 級ならば

$$z_{\cdots xy\cdots}=z_{\cdots yx\cdots}$$

が成立する。ただし $\cdots$ 部分は同じとし，微分は全部で n 回されるものとする。

α，β を x と y からなる列とする。ただし α は k 個の x,y から，β は $n-k-2$ 個の x,y からできているとする。ただし $k \leqq n-2$ とする。ここで証明すべきことは $z_{\alpha xy\beta}=z_{\alpha yx\beta}$ である。

z_α は z を k 回微分したものなので C^{n-k} 級である。$n-k \geqq 2$ なので命題が適用できる。このとき $\left(z_\alpha\right)_{xy}=\left(z_\alpha\right)_{yx}$ が成立する。よって $z_{\alpha xy}=\left(z_\alpha\right)_{xy}=\left(z_\alpha\right)_{yx}=z_{\alpha yx}$ が成立する。これより

$$z_{\alpha xy\beta}=\left(z_{\alpha xy}\right)_\beta=\left(z_{\alpha yx}\right)_\beta=z_{\alpha yx\beta}$$

の成立が示される。

(3) $z=f(x,y)$ が C^n 級ならば n 階の導関数は x,y で微分した回数が同じであればその順序によらず決る。

γ を x と y からなる列で，x が k 個，y が $n-k$ 個からなるとする。ω を

$$\omega=\underbrace{x\cdots x}_{k\ 個}\underbrace{y\cdots y}_{n-k\ 個}$$

となる列とするとき

$$z_\gamma=z_\omega$$

を示せばよい。γ が $\cdots yx\cdots$ という部分列を含まなければ，$\gamma=\omega$ なので $z_\gamma=z_\omega$ が成立する。γ が $\cdots yx\cdots$ という部分列を含んだとする。$\gamma=\alpha yx\beta$ と表記したとき $\gamma_1=\alpha xy\beta$ とおく。γ_1 が $\cdots yx\cdots$ という部分列を含まなければ $\gamma_1=\omega$ となっている。γ_1 が $\cdots yx\cdots$ という部分列を含んだとする。$\gamma_1=\alpha_1 yx\beta_1$ と表記したとき $\gamma_2=\alpha_1 xy\beta_1$ とおく。このことを続けていくことにより列 $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_t$ が存在して $\gamma_t=\omega$ となることが分かる。(2) より任意の k に対し $z_{\gamma_k}=z_{\gamma_{k+1}}$ が成立するので

$$z_\gamma=z_{\gamma_1}=\cdots=z_{\gamma_t}=z_\omega$$

が成立する。

7 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (10)。

学科		在籍番号		氏名	