解析学 I 第 2 回試験

2008–2–17　　河野

注意: ・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 次の問いに答えよ。

(1) $y = f(x) = \dfrac{x^3+4x^2+8x+16}{(x^2+4)(x+2)^2}$ を部分分数展開せよ。

$$\frac{x^3+4x^2+8x+16}{(x^2+4)(x+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2}$$

とおいて A, B, C, D に関する連立 1 次方程式を立てて解くと $A = 0, B = 1, C = 1, D = 1$ が得られる。よって

$$\frac{x^3+4x^2+8x+16}{(x^2+4)(x+2)^2} = \frac{1}{x^2+4} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2}$$

と部分分数展開できる。

勿論 $\dfrac{x^3+4x^2+8x+16}{(x^2+4)(x+2)^2} = \dfrac{1}{x^2+4} + \dfrac{x+3}{(x+2)^2}$ 等でも正解である。

(2) $I = \displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ。ただし $\displaystyle\int \frac{1}{t^2+1}dt = \arctan t$ という事実を使用してもよい。

$$I = \int f(x)dx = \int \frac{1}{x^2+4}dx + \int \frac{1}{x+2}dx + \int \frac{1}{(x+2)^2}dx$$

となるのでそれぞれを計算する。

$$\int \frac{1}{x+2}dx = \log|x+2|$$
$$\int \frac{1}{(x+2)^2}dx = -\frac{1}{x+2}$$

が成立する。また $x = 2t$ とおくと $\dfrac{dx}{dt} = 2$ なので

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+4}dx &= \int \frac{1}{4t^2+4}2dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dt \\ &= \frac{1}{2}\arctan t = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\end{aligned}$$

となる。よって

$$I = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + \log|x+2| - \frac{1}{x+2}$$

である。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ 不定積分

$$I=\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx$$

を次にしたがって求めよ。

(1) $\sqrt{x^2-4}+x=t$ とおき，x を t を用いて表せ。

$\sqrt{x^2-4}=t-x$ を 2 乗すると $x^2-4=t^2-2tx+x^2$ となる。これを x について解くと

$$x=\frac{t^2+4}{2t}$$

となる。

(2) $t-x$ を t を用いて表せ。

$$t-x=t-\frac{t^2+4}{2t}=\frac{2t^2-t^2-4}{2t}=\frac{t^2-4}{2t}$$

(3) $\dfrac{dx}{dt}$ を求めよ。

$$\frac{dx}{dt}=\frac{t^2-4}{2t^2}$$

(4) 不定積分 I を求めよ。

$$\begin{aligned}
I&=\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx\\
&=\int \frac{1}{\dfrac{t^2+4}{2t}\,\dfrac{t^2-4}{2t}}\,\frac{t^2-4}{2t^2}dt\\
&=2\int \frac{1}{t^2+4}dt=\arctan\frac{t}{2}\\
&=\arctan\frac{\sqrt{x^2-4}+x}{2}
\end{aligned}$$

途中 $\boxed{1}$ の計算途中の結果を用いた。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数 $y=f(x)$ が次の条件を満たすとき，関数が満たすべき微分方程式を求めよ。

曲線 $y=f(x)$ 上の点を P とする。P における法線が x 軸と交わる点を N，P から x 軸へ下ろした垂線の足を Q とすると線分 QN の長さが常に一定である。

点 P を (x,y) とすると P における法線の方程式は座標を (X,Y) で表すと，

$$Y=-\frac{1}{y'}(X-x)+y$$

である。N の座標を $(a,0)$ とすると法線は N を通るので

$$0=-\frac{1}{y'}(a-x)+y$$

が成立する。$a-x$ は QN の長さ ($a<x$ の場合はマイナスをつけたもの) なので定数である。これを C とおくと微分方程式は

$$yy'=C$$

となる。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 微分方程式

$$y''-2y'+2y=0$$

について次の問いに答えよ。

(1) 微分方程式を複素数値関数の範囲で解け。

微分方程式を演算子を用いて書き直すと $(D^2-2D+2)y=0$ となる。$t^2-2t+2=0$ の解は $\alpha=1+i,\beta=1-i$ とおくと α と β なので $(D-\alpha)(D-\beta)y=0$ と書ける。$u=(D-\beta)y$ とおくと $(D-\alpha)u=0$ という微分方程式を得る。$e^{\alpha x}De^{-\alpha x}=D-\alpha$ なので $e^{\alpha x}De^{-\alpha x}u=0$ となり，$De^{-\alpha x}u=0$ となる。両辺を x で積分すると

$$e^{-\alpha x}u=C_1$$

となるので $u=C_1e^{\alpha x}$ となる。よって y は微分方程式

$$(D-\beta)y=C_1e^{\alpha x}$$

を満たす。$e^{\beta x}De^{-\beta x}=D-\beta$ を用いて変形すると

$$e^{\beta x}De^{-\beta x}y=C_1e^{\alpha x}$$

となるが両辺に $e^{-\beta x}$ をかけて $De^{-\beta x}y=C_1e^{(\alpha-\beta)x}$ となる。両辺を x で積分して $e^{-\beta x}y=\dfrac{C_1}{\alpha-\beta}e^{(\alpha-\beta)x}+C_2$ を得る。$\dfrac{C_1}{\alpha-\beta}$ をあらためて C_1 と置き直せば解として

$$y=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}=C_1e^{(1+i)x}+C_2e^{(1-i)x}$$

が得られる。

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

(2) 微分方程式の実数値関数としての一般解を求めよ。一般解であることの証明はしなくてもよい。

$C_1 = C_2 = \dfrac{1}{2}$ とすると 1 つの実数値関数解として

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}e^{(1+i)x} + \frac{1}{2}e^{(1-i)x} = \frac{1}{2}e^x e^{ix} + \frac{1}{2}e^x e^{-ix} \\ &= \frac{1}{2}e^x(\cos x + i\sin x) + \frac{1}{2}e^x(\cos x - i\sin x) = e^x\cos x \end{aligned}$$

を得る。$C_1 = \dfrac{1}{2i}$，$C_2 = -\dfrac{1}{2i}$ とすると 1 つの実数値関数解として

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2i}e^{(1+i)x} - \frac{1}{2i}e^{(1-i)x} = \frac{1}{2i}e^x e^{ix} - \frac{1}{2i}e^x e^{-ix} \\ &= \frac{1}{2i}e^x(\cos x + i\sin x) - \frac{1}{2i}e^x(\cos x - i\sin x) = e^x\sin x \end{aligned}$$

を得る。

一般解は

$$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$$

となる。

(3) (2) で求めた解の中で $y(0) = 1$，$y'(0) = 2$ を満たす関数を求めよ。

$y' = C_1\left(e^x\cos x - e^x\sin x\right) + C_2\left(e^x\sin x + e^x\cos x\right)$ なので

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = C_1 e^0\cos 0 + C_2 e^0 \sin 0 = C_1 \\ 2 &= y'(0) = C_1\left(e^0\cos 0 - e^0\sin 0\right) + C_2\left(e^0\sin 0 + e^0\cos 0\right) = C_1 + C_2 \end{aligned}$$

となり，これを解いて $C_1 = 1, C_2 = 1$ を得る。よって解は

$$y = e^x\cos x + e^x\sin x$$

である。

(4) (2) の解が一般解であることを示せ。ただし次の定理は使用してよい。

微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$ の解は存在する。また p, q を任意に与えたとき $y(0) = p$，$y'(0) = q$ を満たす解はただ 1 つである。

$A = \{\, y \mid y$ は $y'' - 2y' + 2y = 0$ の解となる実関数$\,\}$，$B = \{\, y = C_1 e^x\cos x + C_2 e^x \sin x \mid C_1, C_2$は実数$\,\}$ とするとき $A = B$ を示せばよい。y を B の任意の元とするとき

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + 2y &= C_1(-2e^x\sin x) + C_2(2e^x\cos x) - 2C_1(e^x\cos x - e^x\sin x) - 2C_2(e^x\sin x + e^x\cos x) + 2C_1\cos x + 2C_2 e^x \sin x \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるので $y \in A$ である。また y を A の任意の元とする。$z = y(0)e^x\cos x + (y'(0) - y(0))e^x\sin x$ とおくと y，z ともに微分方程式 $y'' - 2y' + 2y = 0$ の解であり，$y(0) = z(0)$ かつ $y'(0) = z'(0)$ を満たす。よって定理より $y = z$ となる。$z \in B$ なので $y \in B$ となる。

以上により $A = B$ が示される。