| 解析学 II 第 1 回試験 |
|---|

2007–6–04　　河野

**注意**:　答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問に答えよ。

(1) 1 変数関数 $y = f(x)$ の不定積分の定義を述べよ。

(2) 1 変数関数 $y = f(x)$ の区間 $[a, b]$ における定積分の定義を述べよ。

(3) $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx$ は積分可能か。不可能な場合はその事を示し。可能な場合は定義に基づいて積分を計算せよ。ただし $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ を用いてよい。

**(1)** $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$ となる関数 $F(x)$ が存在するとき，$F(x)$ を $f(x)$ の不定積分といい,

$$\int f(x)dx$$

と表す。

**(2)** $\Delta = \{ x_0, x_1, \ldots, x_n \}$ が $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ を満たすとき $[a, b]$ の分割と呼ぶ。$\Delta$ に対し $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, n)$ とおく。また $\|\Delta\| = \max \{ \Delta x_i \mid i = 1, \ldots, n \}$ を分割の最大幅という。各 $i$ $(i = 1, \ldots, n)$ に対し

$$M_i = \sup \{ f(x) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i \}, \qquad m_i = \inf \{ f(x) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i \}$$

とおく。ここで sup は上限，inf は下限を意味する。

$$S(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \qquad s(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

とおく。

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} S(\Delta) = \lim_{\|\Delta\| \to 0} s(\Delta)$$

となるとき $f(x)$ は $[a, b]$ で積分可能であるといい，この極限値を $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ と書く。

**(3)** $\Delta_n$ を $[0, 1]$ の $n$ 等分割とする。即ち $x_i = \dfrac{i}{n}$ とする。$\Delta x_i = \dfrac{1}{n}$ であり，$\|\Delta_n\| = \dfrac{1}{n}$ である。$y = x^2$ は $[0, 1]$ で単調増加なので

$$M_i = f(x_i) = \left(\frac{i}{n}\right)^2, \qquad m_i = f(x_{i-1}) = \left(\frac{i-1}{n}\right)^2$$

である。

$$\begin{aligned} S(\Delta_n) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

であり $s(\Delta_n)$ を同様に計算すると $\dfrac{1}{6} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \left(2 - \dfrac{1}{n}\right)$ となる。$n \to \infty$ のとき $\|\Delta_n\| \to 0$ となるので $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S(\Delta_n) = \frac{1}{3} = \lim_{n\to\infty} s(\Delta_n)$ となる。よって

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

である。

**裏にも問題あり。別紙にも問題あり**

| 学科 | | 在籍番号 | | 氏名 | |
|---|---|---|---|---|---|

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の広義積分は収束するか。収束しないときはそのことを示し，収束するときは計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx$

(2) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$

**(1)** 関数 $y=\dfrac{1}{x^2}$ は $x=0$ で不連続なので，広義積分 $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}dx$ および $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}dx$ がとも収束するとき，広義積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx$ は収束する。$1>\varepsilon>0$ とし，$I(\varepsilon)=\displaystyle\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x^2}dx$ とおく。

$$I(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_{\varepsilon}^{1}=\frac{1}{\varepsilon}-1$$

となる。$\varepsilon\to+0$ のとき $I(\varepsilon)\to\infty$ となるので $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}dx$ は収束しない。よって $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx$ も収束しない。

**(2)** $M>0$ に対し $I(M)=\displaystyle\int_{0}^{M}\frac{1}{1+x^2}dx$ とおく。$x=\tan t$ とおいて変数変換を行う。$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\cos^2 t}=\dfrac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^2 t}=1+\left(\dfrac{\sin t}{\cos t}\right)^2=1+x^2$ である。$T$ を $M=\tan T$ $(0<T<\dfrac{\pi}{2})$ とすると，$x:0\to M$ のとき $t:0\to T$ となるので

$$\begin{aligned} I(M) &= \int_{0}^{M}\frac{1}{1+x^2}dx \\ &= \int_{0}^{T}dt=T \end{aligned}$$

となる。$M\to\infty$ のとき $T\to\dfrac{\pi}{2}$ となるので

$$\begin{aligned} \int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx &= \lim_{M\to\infty}I(M) \\ &= \lim_{T\to\frac{\pi}{2}}T=\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

となる。

$\boxed{\mathbf{3}}$ $x = x(t) = 3t - t^3, y = y(t) = 1 - t^2$ でパラメータ表示された曲線について次の問に答えよ。

(1) この曲線の概形を書け。

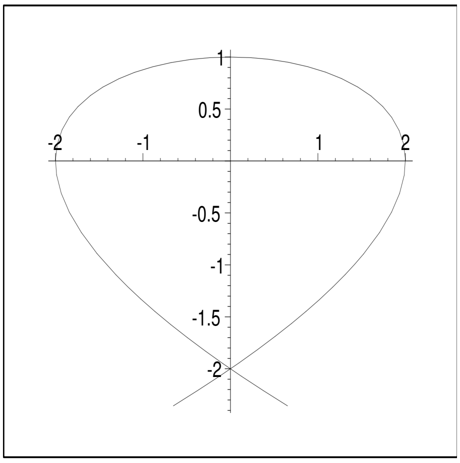
(2) この曲線によって囲まれる部分のうち第 1 象限にある部分の面積を求めよ。

**(1)** $x'(t) = 3 - 3t^2$ より $t = \pm 1$ において $x'(t) = 0$ となる。$y'(t) = -2t$ より $t = 0$ において $y'(t) = 0$ となる。このとき導関数の 0 になる点は $(x(-1), y(-1)) = (-2, 0)$, $(x(0), y(0)) = (0, 1)$, $(x(1), y(1)) = (2, 0)$ となっている。

よって増減表は以下の様になる。

| $t$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x'$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $x$ | $\leftarrow$ | | $\rightarrow$ | $\rightarrow$ | $\rightarrow$ | | $\leftarrow$ |
| $y'$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $y$ | $\uparrow$ | $\uparrow$ | $\uparrow$ | $0$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ |
| 曲線 | $\nwarrow$ | $\uparrow$ | $\nearrow$ | $\rightarrow$ | $\searrow$ | $\downarrow$ | $\nwarrow$ |

$x(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm\sqrt{3}$ となるので $t = 0, \pm\sqrt{3}$ のとき，曲線は $y$ 軸と交わる。$y(t) = 0$ を解くと $t = \pm 1$ となるので $t = \pm 1$ のとき，曲線は $x$ 軸と交わる。このことに注意して概形を描くと次の様になる。




**(2)** $t$ が 1 から 0 まで変化するとき点は第 1 象限を動く。よって求める面積を $S$ とすると

$$S = \frac{1}{2}\int_1^0 x(t)y'(t) - x'(t)y(t)dt \quad = \quad = \frac{8}{5}$$

である。

**裏にも問題有り**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 学科 | | 在番籍号 | | 氏名 | |

$\boxed{\mathbf{4}}$ $y = x^2$ と $y = x + 2$ にかこまれる領域を $D$ とする。この領域 $D$ を $x$ 軸の周りで回転させてできる回転体の体積を求めよ。

求める立体の体積を $V$ とする。$x^2 = x + 2$ を解くと，$x = -1, 2$ となる。

$$D_1 = \left\{ (x, y) \,\middle|\, -1 \leqq x \leqq 2, 0 \leqq y \leqq x^2 \right\}, \quad D_2 = \{ (x, y) \mid -1 \leqq x \leqq 2, 0 \leqq y \leqq x + 2 \}$$

とおく。$D_1, D_2$ を $x$ 軸の回りで回転させてできる立体の体積をそれぞれ $V_1, V_2$ とすると

$$V = V_2 - V_1$$

が成立している。よって

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^{2} (x+2)^2 dx - \pi \int_{-1}^{2} x^4 dx \\ &= \frac{72\pi}{5} \end{aligned}$$

である。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (10)。