解析学II 第2回試験

2007–8–6　　河野

注意:
・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。再履修者以外は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 領域 $D = \{\, a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d \,\}$ を長方形領域とする。関数 $f(x, y)$ の重積分 $\iint_D f(x,y)dxdy$ の定義を述べよ。

$\Delta = \{\, x_0, x_1 \ldots, x_m \,;\, y_0, y_1 \ldots, y_n \,\}$ を D の分割とする。すなわち $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b, c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$ とする。各 i, j $(i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n)$ に対し

$$M_{ij} = \sup\{\, f(x,y) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j \,\}, \quad m_{ij} = \inf\{\, f(x,y) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j \,\}$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1}, \quad \|\Delta\| = \max\{\, \Delta x_i, \Delta y_j \mid i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n \,\}$$

とおく。ただし sup は上限，inf は下限を意味する。

$$S(\Delta) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j, \quad s(\Delta) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

とおく。$\lim_{\|\Delta\| \to 0} S(\Delta) = \lim_{\|\Delta\| \to 0} s(\Delta)$ となるとき $f(x, y)$ は D で積分可能であるといい，この極限値を

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

で表す。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ $D=\{\,0\leqq x\leqq 1, 0\leqq y\leqq 2\,\}$ とする。重積分

$$\iint_D xydxdy$$

を定義に基づき計算せよ。

$\Delta_n=\{\,x_0,x_1,\ldots,x_n\,\}$ を n 等分割とする。即ち $x_i=\dfrac{i}{n}$, $y_j=\dfrac{2j}{n}$ とする。

$f(x,y)$ は D において x に関しても y に関しても単調増加なので小領域 $\{\,x_{i-1}\leqq x\leqq x_i,\ y_{j-1}\leqq y\leqq y_j\,\}$ における最大値は (x_i,y_j) でとり，最小値は (x_{i-1},y_{j-1}) でとる。よって $M_{ij}=x_iy_j$, $m_{ij}=x_{i-1}y_{j-1}$ である。よって $M_{ij}=\dfrac{2ij}{n^2}$, $m_{ij}=\dfrac{2(i-1)(j-1)}{n^2}$ となる。$\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$, $\Delta y_j=\dfrac{2}{n}$ なので，

$$S(\Delta_n)\quad=\quad\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{2ij}{n^2}\frac{2}{n}\frac{1}{n}=\frac{4}{n^4}\sum_{i=1}^{n}i\sum_{j=1}^{n}j=\frac{4}{n^4}\frac{n(n+1)}{2}\frac{n(n+1)}{2}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

となる。

$$s(\Delta_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{2(i-1)(j-1)}{n^2}\frac{2}{n}\frac{1}{n}=\frac{4}{n^4}\sum_{i=1}^{n}(i-1)\sum_{j=1}^{n}(j-1)=\frac{4}{n^4}\frac{n(n-1)}{2}\frac{n(n-1)}{2}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^2$$

であり，$n\to\infty$ のとき $\|\Delta_n\|=\dfrac{2}{n}\to 0$ となるので，

$$\lim_{n\to\infty}S(\Delta_n)=\lim_{n\to\infty}s(\Delta_n)=1$$

となるので，積分可能であり

$$\iint_D xydxdy=1$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次に問に答えながら $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx$ を求めよ。広義積分

$$J = \iint_D \exp\left(-x^2 - y^2\right) dxdy \quad (D = \{\, x \geqq 0, y \geqq 0 \,\})$$

とおく。なお $\exp(X) = e^X$ であり，n は自然数とする。

(1) $\{A_n\}$ が D の近似増加列であることの定義を述べよ。

A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ が次の条件をみたすとき D の近似増加列であるという。

(1) 任意の自然数 n に対し A_n は有界閉集合である。

(2) 任意の自然数 n に対し $A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq D$ が成立する。

(3) D に含まれる任意の有界閉集合 K に対し，ある n が存在して $K \subseteq A_n$ となる。

(2) $A_n = \left\{\, (x, y) \in D \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq n^2, x \geqq 0, y \geqq 0 \,\right\}$ とし，$J_n = \displaystyle\iint_{A_n} \exp\left(-x^2 - y^2\right) dxdy$ とするとき，J を J_n を用いて表せ。このとき極限記号 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}$ を用いてよい。

$$J = \lim_{n\to\infty} J_n$$

(3) J_n を計算するため $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ とおいて変数変換を行う。A_n に対応する r–θ 平面の領域 E_n を求めよ。

$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ なので $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ また $r = \sqrt{x^2 + y^2} \leqq \sqrt{n^2} = n$ なので

$$E_n = \left\{\, (r, \theta) \,\middle|\, 0 \leqq r \leqq n, 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2} \,\right\}$$

とおく。$(r, \theta) \in E_n$ のとき対応する点 (x, y) は $(x, y) \in A_n$ であり，$(x, y) \in A_n$ に対し対応する点が (x, y) になるような (r, θ) が E_n に存在する。よってこの E_n が求めるものである。

(4) この対応で一対一でない部分を求めよ。

$r = 0$ のとき θ の値によらず対応する点は $(0, 0)$ になる。$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で $\sin\theta$ は一対一である。よって $r \neq 0$ のときは一対一に対応する。よって求める領域は

$$\{\, (r, \theta) \in E_n \mid r = 0 \,\}$$

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

(5) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を計算せよ (計算過程も書くこと)。

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \\ &= r\cos^2\theta - \left(-r\sin^2\theta\right) = r\end{aligned}$$

(6) J_n を求めよ。

$$\begin{aligned}J_n &= \iint_{A_n} \exp\left(-x^2-y^2\right) dxdy = \iint_{E_n} \exp\left(-r^2\right) rdrd\theta \\ &= \int_0^n \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\exp\left(-r^2\right) d\theta \right\} dr = \frac{\pi}{2}\int_0^n r\exp\left(-r^2\right) dr \\ &= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}\exp\left(-r^2\right)\right]_{r=0}^n = \frac{\pi}{4}\left(1-\exp\left(-n^2\right)\right)\end{aligned}$$

(7) $B_n = \{\, 0 \leqq n, 0 \leqq y \leqq n \,\}$ に対し $K_n = \displaystyle\iint_{B_n} \exp\left(-x^2-y^2\right) dxdy$ とおく。このとき $K_n = \left\{ \displaystyle\int_0^n \exp\left(-x^2\right) dx \right\}^2$ が成立することを示せ。

$$\begin{aligned}K_n &= \iint_{B_n} \exp\left(-x^2-y^2\right) dxdy = \iint_{B_n} \exp\left(-x^2\right)\exp\left(-y^2\right) dxdy \\ &= \int_0^n \left\{ \int_0^n \exp\left(-x^2\right)\exp\left(-y^2\right) dy \right\} dx = \int_0^n \left\{ \exp\left(-x^2\right) \int_0^n \exp\left(-y^2\right) dy \right\} dx \\ &= \int_0^n \exp\left(-y^2\right) dy \int_0^n \exp\left(-x^2\right) dx = \int_0^n \exp\left(-x^2\right) dx \int_0^n \exp\left(-x^2\right) dx \\ &= \left\{ \int_0^n \exp\left(-x^2\right) dx \right\}^2\end{aligned}$$

(8) I を求めよ。

$$\begin{aligned}J &= \lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{4}\left(1-\exp\left(-n^2\right)\right) = \frac{\pi}{4} \\ J &= \lim_{n\to\infty} K_n = \lim_{n\to\infty} \left\{ \int_0^n \exp\left(-x^2\right) dx \right\}^2 \\ &= \left\{ \lim_{n\to\infty} \int_0^n \exp\left(-x^2\right) dx \right\}^2 = I^2\end{aligned}$$

なので

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

となる。

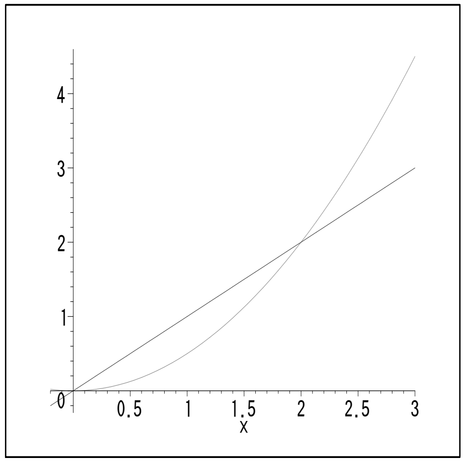
4 D を $y = x$ と $y = ax^2$ に囲まれる領域とする。ただし $a > 0$ とする。

$$I = \iint_D 2xydxdy$$

に関し次の問に答えよ。

(1) D を図示せよ。

図は $a = \dfrac{1}{2}$ として描いている。



(2) D を縦線型 ($D = \{\, a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x) \,\}$ の形) に表示し，y で先に積分するタイプの累次積分で表せ (計算は実行しなくてもよい)。

$D = \left\{ 0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{a}, ax^2 \leqq y \leqq x \right\}$ であり，

$$I \quad = \quad \int_0^{\frac{1}{a}} \left\{ \int_{ax^2}^{x} 2xydy \right\} dx$$

(3) D を縦線型 ($D = \{\, a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x) \,\}$ の形) に表示し，x で先に積分するタイプの累次積分で表せ (計算は実行しなくてもよい)。

$D = \left\{ 0 \leqq y \leqq \dfrac{1}{a}, y \leqq x \leqq \sqrt{\dfrac{y}{a}} \right\}$ であり，

$$I \quad = \quad \int_0^{\frac{1}{a}} \left\{ \int_{y}^{\sqrt{\frac{y}{a}}} 2xydx \right\} dy$$

(4) I を求めよ。

$$I \quad = \quad \int_0^{\frac{1}{a}} \left\{ \int_{ax^2}^{x} 2xydy \right\} dx = \int_0^{\frac{1}{a}} x(x^2 - a^2x^4)dx = \frac{1}{12a^4}$$

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{5}}$ 3 重積分

$$\iiint_D xyz dxdydz \quad (D = \left\{ \sqrt{x^2+y^2} \leqq z \leqq 1 \right\})$$

を次に従って求めよ。

(1) D_z を z 座標が z である平面と D との共通部分とする。D_z を x–y 平面内に図示せよ。また x–y 平面内の領域として縦線型に表示せよ。縦線型とは $D_z = \{ a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x) \}$ のことである。

$0 \leqq z \leqq 1$ の範囲で z を固定すると

$$D_z = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq z^2 \right\}$$

なので

$$D_z = \left\{ (x, y) \,\middle|\, -z \leqq x \leqq z, -\sqrt{z^2 - x^2} \leqq y \leqq \sqrt{z^2 - x^2} \right\}$$

と表せる。

図については省略

(2) 3 重積分 I を累次積分の形に表示せよ。

$$\iiint_D xyz dxdydz = \int_0^1 \left\{ \int_{-z}^{z} \left\{ \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} xyz dy \right\} dx \right\} dz$$

(3) I を求めよ。

$$\begin{aligned} \iiint_D xyz dxdydz &= \int_0^1 \left\{ \int_{-z}^{z} \left\{ \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} xyz dy \right\} dx \right\} dz \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_{-z}^{z} \left\{ \left[\frac{1}{2} xy^2 z \right]_{y=-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} \right\} dx \right\} dz \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_{-z}^{z} 0 dx \right\} dz = \int_0^1 0 dz = 0 \end{aligned}$$