解析学 II 第 2 回試験

2007–8–6　　河野

注意:　答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 領域 $D = \{\, a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d \,\}$ を長方形領域とする。関数 $f(x, y)$ の重積分 $\displaystyle\iint_D f(x, y)dxdy$ の定義を述べよ。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ $D = \{\,0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 2\,\}$ とする。重積分

$$\iint_D xy dx dy$$

を定義に基づき計算せよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次に問に答えながら $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx$ を求めよ。広義積分

$$J = \iint_D \exp\left(-x^2 - y^2\right) dxdy \quad (D = \{\, x \geqq 0, y \geqq 0 \,\})$$

とおく。なお $\exp(X) = e^X$ であり，n は自然数とする。

(1) $\{A_n\}$ が D の近似増加列であることの定義を述べよ。

(2) $A_n = \left\{\, (x, y) \in D \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq n^2 \,\right\}$ とし，$J_n = \displaystyle\iint_{A_n} \exp\left(-x^2 - y^2\right) dxdy$ とするとき，J を J_n を用いて表せ。このとき極限記号 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}$ を用いてよい。

(3) J_n を計算するため $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ とおいて変数変換を行う。A_n に対応する r–θ 平面の領域 E_n を求めよ。

(4) この対応で一対一でない部分を求めよ。

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

(5) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を計算せよ (計算過程も書くこと)。

(6) J_n を求めよ。

(7) $B_n = \{\, 0 \leqq n, 0 \leqq y \leqq n \,\}$ に対し $K_n = \displaystyle\iint_{B_n} \exp\left(-x^2 - y^2\right) dxdy$ とおく。このとき $K_n = \left\{ \displaystyle\int_0^n \exp\left(-x^2\right) dx \right\}^2$ が成立することを示せ。

(8) I を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ D を $y=x$ と $y=ax^2$ に囲まれる領域とする。ただし $a>0$ とする。

$$I=\iint_D 2xydxdy$$

に関し次の問に答えよ。

(1) D を図示せよ。

(2) D を縦線型 ($D=\{\, a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x)\,\}$ の形) に表示し，y で先に積分するタイプの累次積分で表せ (計算は実行しなくてもよい)。

(3) D をを適当な領域 D_1 および D_2 に分割し，それぞれを縦線型 ($D=\{\, a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x)\,\}$ の形) に表示し，x で先に積分するタイプの累次積分で表せ (計算は実行しなくてもよい)。

(4) I を求めよ。

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{5}}$ 3 重積分

$$\iiint_D xyz dxdydz \quad (D = \left\{ \sqrt{x^2+y^2} \leqq z \leqq 1 \right\})$$

を次に従って求めよ。

(1) D_z を z 座標が z である平面と D との共通部分とする。D_z を x–y 平面内に図示せよ。また x–y 平面内の領域として縦線型に表示せよ。縦線型とは $D_z = \{ a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x) \}$ のことである。

(2) 3 重積分 I を累次積分の形に表示せよ。

(3) I を求めよ。