数理解析 II 第 1 回試験準備問題解説

河野

「解説を書く」と言いましたが，ここにあげた準備問題の多くは過去の試験問題および演習問題からとっているので，解説がすでにある問題はそれがどこに書いてあるかを示すだけにして，問題を考えるときの注意のようなものを書くことにしました。

1 次の問に答えよ。

(1) 1 変数関数 $y = f(x)$ の不定積分の定義を述べよ。

(2) 1 変数関数 $y = f(x)$ の区間 $[a, b]$ における定積分の定義を述べよ。

(3) $\displaystyle\int_1^2 x^2 dx$ は積分可能か。不可能な場合はその事を示し。可能な場合は定義に基づいて積分を計算せよ。ただし $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ を用いてよい。

この問題は 2005 年度の数理解析 II の 1 回試験問題の $\boxed{1}$ です。「不定積分」と「定積分」の違いをきちんと理解しておくことがまず大事です。(3) は関数 $y = x^2$ を積分区間 $[1, 2]$ で積分したものです。丸暗記するのではなく，定義からきちんと理解しておいて下さい。そうしておけば，異なる関数に対する積分でも，積分区間が変わった場合でもきちんと計算できるはずです。積分区間が $[a, b]$ のとき n 等分の分点は $x_i = a + (b-a)\dfrac{i}{n}$ となります。$x_0 = a, x_n = b$ となっているかをチェックすることで正しい分点が選ばれてるかを判定できます。今の場合 $x_i = 1 + \dfrac{i}{n}$ になります。

2 次の広義積分は収束するか。収束しないときはそのことを示し，収束するときは計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^4} dx$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{4 + x^2} dx$

(1) 2000 年数理解析 II 試験 $\boxed{2}$ (2) の問題ですが，解説はないのでここに書いておきます。(1),(2),(3) ともに広義積分の定義をきちんと理解してそれにしたがって収束・発散を考えて下さい。$\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$, $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$ が共に収束するとき

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$$

であり，$\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{|x|}}dx, \int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{|x|}}dx$ のどちらかが収束しない場合 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{|x|}}dx$ は収束しないというのが定義だった。$\varepsilon > 0$ に対し

$$I(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{\sqrt{|x|}}dx$$

とおく。

$$\begin{aligned} I(\varepsilon) &= \int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{\sqrt{|x|}}dx = \int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx \\ &= \Big[2\sqrt{x}\Big]_{\varepsilon}^{1} = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \end{aligned}$$

なので

$$\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{|x|}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left\{2 - 2\sqrt{\varepsilon}\right\} = 2$$

となる。$\varepsilon > 0$ に対し $J(\varepsilon) = \displaystyle\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{|x|}}dx$ とおく。$x = -t$ とおき変数変換を実行すると

$$\begin{aligned} J(\varepsilon) &= \int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{|x|}}dx = \int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{-x}}dx \\ &= \int_{1}^{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{t}}(-1)dt = \int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{\sqrt{t}}dt \\ &= \Big[2\sqrt{t}\Big]_{\varepsilon}^{1} = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \end{aligned}$$

なので

$$\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{|x|}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left\{2 - 2\sqrt{\varepsilon}\right\} = 2$$

となる。よって

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{|x|}}dx = \int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{|x|}}dx + \int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{|x|}}dx = 2 + 2 = 4$$

となる。

(2) $\varepsilon > 0$ に対し

$$I(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x^4}dx$$

とおく。

$$I(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x^4}dx = \Big[-\frac{1}{3}\frac{1}{x^3}\Big]_{\varepsilon}^{1} = \frac{1}{3\varepsilon^3} - \frac{1}{3}$$

となるが

$$\int_0^1 \frac{1}{x^4}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\frac{1}{3\varepsilon^3}-\frac{1}{3}\right\}$$

は収束しないので，$\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^4}dx$ は収束しない。

(3) 演習問題 1.6(3) です。演習問題は $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4+x^2}dx$ ですが $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{4+x^2}dx$ を求めることも含んでいるので解説を参考にして下さい。

3 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-9}dx$ を求めよ。

不定積分で学んだ有理関数の積分の基本的な所です。部分分数展開します。
$x^2-9=(x-3)(x+3)$ なので

$$\frac{1}{x^2-9}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+3}$$

と部分分数展開できる。右辺を通分して分子を比較することにより

$$1=A(x+3)+B(x-3)=(A+B)x+3(A-B)$$

が恒等的に成立している。よって $A=\dfrac{1}{6}$，$B=-\dfrac{1}{6}$ となる。よって

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{1}{x^2-9}dx &= \int_0^1\left\{\frac{1}{6(x-3)}-\frac{1}{6(x+3)}\right\}dx\\ &= \frac{1}{6}\Big[\log|x-3|\Big]_0^1-\frac{1}{6}\Big[\log|x+3|\Big]_0^1=-\frac{1}{6}\log 2\end{aligned}$$

となる。

4 $x=x(t)=t^2-t^4, y=y(t)=t-t^3$ でパラメータ表示された曲線について次の問に答えよ。
(1) この曲線の概形を書け。
(2) この曲線によって囲まれる部分のうち第 1 象限にある部分の面積を求めよ。

これは講義中に説明しましたネ。2005 年数理解析 II 第 1 回試験 $\boxed{3}$ の x と y を入れ換えたものです。解説の x と y を入れ換えて読んで下さい。

5 $y=x^2$ と $y=5x$ にはさまれる領域の面積を求めよ。またこの領域を x 軸の周りに回転してできる回転体の体積を求めよ。

演習問題 1.8 です。面積の部分は特に述べることはありません。交点を求めて積分区間を確定させればできます。回転体の方は少し注意して下さい。中空の厚さが一定ではないパイプの様な形なので体積は 2 つの回転体の体積の差で得られます。

$\boxed{\mathbf{6}}$ 「(仕事)=(力)×(移動距離)」という関係がある。バネが x 伸ばされたとき働く力は k を比例定数とすると，$F = kx$ であった。バネを x 伸ばすのに必要な仕事を求めよ。

演習問題 1.9 です。特に述べることはありません。物理量を求める例としてあげました。

$\boxed{\mathbf{7}}$ $r = f(\theta) = 1 + \cos\theta$ と極座標表示されている曲線を**心臓形** ($cardioid$) という。これについて次の問に答えよ。

(1) この曲線の概形を書け。

(2) この曲線によって囲まれる部分の面積を求めよ。

演習問題 1.14 と演習問題 1.16 です。極座標で与えられた図形の概形を書くことと面積を求める問題です。