解析学 I 第 1 回試験

2008–11–28　　河野

注意: ・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。再履修者以外は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 関数 $y=f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ とするとき次の問に答えよ。

(1) $\varepsilon(h)=\dfrac{f(a+h)-(A+Bh)}{h}$ とおく。$\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ が成立するとき $A+Bh$ を $x=a$ で $y=f(x)$ を一番よく近似する 1 次式という。$x=0$ で $y=f(x)$ を一番よく近似する 1 次式を求めよ。

$\lim\limits_{h\to 0}h\varepsilon(h)=0$ より $\lim\limits_{h\to 0}f(h)-(A+Bh)=f(0)-A=\sin\dfrac{\pi}{4}-A=0$ となる。よって $A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる。$\dfrac{f(h)-(A+Bh)}{h}$ はロピタルの定理の条件をみたしているので，これを適用すると，$\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ より

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-(A+Bh)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(h+\frac{\pi}{4}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+Bh\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(h+\frac{\pi}{4}\right)-B}{1}\\&=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-B=0\end{aligned}$$

となる。よって $B=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる。以上より $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}h$ が求める 1 次式である。

(2) $\varepsilon(h)=\dfrac{f(a+h)-(A+Bh+Ch^2)}{h^2}$ とおくとき $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ が成立するとき $A+Bh+Ch^2$ を $x=a$ で $y=f(x)$ を一番よく近似する 2 次式という。$x=0$ で $y=f(x)$ を一番よく近似する 2 次式を求めよ。

$\lim\limits_{h\to 0}h^2\varepsilon(h)=0$ より $\lim\limits_{h\to 0}f(h)-(A+Bh+Ch^2)=f(0)-A=\sin\dfrac{\pi}{4}-A=0$ となる。よって $A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる。$\dfrac{f(h)-(A+Bh+Ch^2)}{h}$ はロピタルの定理の条件をみたしているので，これを適用すると，$\lim\limits_{h\to 0}h\varepsilon(h)=0$ より

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-(A+Bh+Ch^2)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(h+\frac{\pi}{4}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+Bh+Ch^2\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(h+\frac{\pi}{4}\right)-B-2Ch}{1}\\&=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-B=0\end{aligned}$$

となる。よって $B=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる。$\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ より

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-(A+Bh+Ch^2)}{h^2}&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(h+\frac{\pi}{4}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}h+Ch^2\right)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(h+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}-2Ch}{2h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{-\sin\left(h+\frac{\pi}{4}\right)--2C}{2}=-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)-2C=0\end{aligned}$$

となる。よって $C=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ となる。以上より $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}h-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}h^2$ が求める 2 次式である。

裏にも問題あり。

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ $y = f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ を $x=2$ でテーラー展開することを考える。次の問いに答えながら，テーラー展開を求めよ。

(1) $f'(x)$ および $f''(x)$，$f^{(3)}(x)$ を求めよ。

$y=(x+3)^{-1}$ なので，$y'=-(x+3)^{-2}$，$y''=2(x+3)^{-3}$，$y'''=-6(x+3)^{-4}$ となる。

(2) 自然数 n に対し $f^{(n)}(x)$ を予想し，それが正しいことを数学的帰納法で証明せよ。

$f^{(n)}(x)=(-1)^n n!(x+3)^{-(n+1)}$ の成立が予想される。

(1) $n=1$ のとき $f^{(1)}(x)=f'(x)=-(x+3)^{-2}=(-1)^1 1!(x+3)^{-(1+1)}$ となるので $n=1$ のとき成立している。

(2) $n=k$ のとき成立を仮定する。即ち $f^{(k)}(x)=(-1)^k k!(x+3)^{-(k+1)}$ を仮定する。この両辺を微分すると

$$
\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left((-1)^k k!(x+3)^{-(k+1)}\right)' \\
&= (-1)^k k!\,(-(k+1))\,(x+3)^{-(k+1)-1} \\
&= (-1)^{k+1}(k+1)!(x+3)^{-\left((k+1)+1\right)}
\end{aligned}
$$

となる。よって $k+1$ でも成立している。以上により証明された。

(3) $y=f(x)=\dfrac{1}{x+3}$ を $x=2$ でテーラー展開せよ。

$f(2)=\dfrac{1}{5}$ であり，$f^{(n)}(2)=(-1)^n n!\dfrac{1}{5^{n+1}}$ となるので，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{1}{2!}f''(2)(x-2)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(2)(x-2)^2+\cdots \\
&= \frac{1}{5}-\frac{1}{5^2}(x-2)+\frac{1}{5^3}(x-2)^2+\cdots+(-1)^n\frac{1}{5^{n+1}}(x-2)^n+\cdots
\end{aligned}
$$

と展開できる。