解析学 I 第 2 回試験

2009–1–30　　河野

注意: ・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。再履修者以外は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 $z = f(x,y) = (x+1)^3(y+1)^4$ とする。$f(h,k)$ を $(0,0)$ で一番よく近似する n 次式 $g(h,k)$ とは，$g(h,k)$ が h,k に関する n 次式で，$\varepsilon(h,k) = \dfrac{f(h,k)-g(h,k)}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^n}$ とおくとき $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$ が成立するときをいう。このとき次の問に答えよ。このとき「$\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} D^j f(x,y)$ が (x,y) で $f(x+h,y+k)$ を最もよく近似する n 次式である」という定理を用いてもよいが，用いずに出来るものは用いずに解答すること。

(1) $f(h,k)$ を $(0,0)$ で最もよく近似する 1 次式を求めよ。

$f_x(x,y) = 3(x+1)^2(y+1)^4$，$f_y(x,y) = 4(x+1)^3(y+1)^3$ なので $f(0,0) = 1$，$f_x(0,0) = 3$，$f_y(0,0) = 4$ となる。$g(h,k) = 1 + 3h + 4k$ とおく。$F(h,k) = f(h,k) - g(h,k)$ とおくと，$F(h,k)$ は h,k に関する多項式であり，$F(0,0) = 0$ より定数項は 0 である。また $F_x(0,0) = 0$，$F_y(0,0) = 0$ より 1 次の項も 0 である。$F(h,k)$ は 2 次以上の項の和になっている。よって 2 次以上の各項 ah^pk^q (ただし $p+q \geqq 2$) に対して $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{ah^pk^q}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ が示されれば，$g(h,k)$ が求めるものであることが分かる。$h = r\cos\theta$，$k = r\sin\theta$ と極座標に変換すると，$(h,k)\to 0$ と $r \to +0$ は同値である。よって

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{ah^pk^q}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{ar^p\cos^p\theta r^q\sin^q\theta}{\sqrt{r^2\cos^2+r^2\sin^2\theta}} \\
&= \lim_{r\to+0} \frac{r^{p+q}\cos^p\theta\sin^q\theta}{r} = \lim_{r\to+0} r^{p+q-1}\cos^p\theta\sin^q\theta
\end{aligned}$$

となるが，$p+q-1 \geqq 1$ なので $I = 0$ となる。以上により $g(h,k) = 1+3h+3k$ が最もよく近似する 1 次式であることが示された。

(2) $f(h,k)$ を $(0,0)$ で最もよく近似する 2 次式を求めよ。

$f_x(x,y) = 3(x+1)^2(y+1)^4$，$f_y(x,y) = 4(x+1)^3(y+1)^3$，$f_{xx}(x,y) = 6(x+1)(y+1)^4$，$f_{xy}(x,y) = 12(x+1)^2(y+1)^3$，$f_{yy}(x,y) = 12(x+1)^3(y+1)^2$ なので $f(0,0) = 1$，$f_x(0,0) = 3$，$f_y(0,0) = 4$，$f_{xx}(0,0) = 6$，$f_{xy}(0,0) = 12$，$f_{yy}(0,0) = 12$ となる。$g(h,k) = f(0,0) + f_x(0,0)h + f_y(0,0)k + \dfrac{1}{2}\left(f_{xx}(0,0)h^2 + 2f_{xy}(0,0)hk + f_{yy}(0,0)k^2\right) = 1+3h+4k+3h^2+12hk+6k^2$ とおく。$F(h,k) = f(h,k) - g(h,k)$ とおくと，$F(h,k)$ は h,k に関する多項式であり，$F(0,0) = 0$ より定数項は 0 である。また $F_x(0,0) = 0$，$F_y(0,0) = 0$ より 1 次の項も 0 である。$F_{xx}(0,0) = 0$，$F_{xy}(0,0) = 0$，$F_{yy}(0,0) = 0$ より 2 次の項も 0 である。$F(h,k)$ は 3 次以上の項の和になっている。よって 3 次以上の各項 ah^pk^q (ただし $p+q \geqq 3$) に対して $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{ah^pk^q}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^2} = 0$ が示されれば，$g(h,k)$ が求めるものであることが分かる。$h = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ と極座標に変換すると，$(h,k)\to 0$ と $r\to+0$ は同値である。よって

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{ah^pk^q}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^2} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{ar^p\cos^p\theta r^q\sin^q\theta}{\left(\sqrt{r^2\cos^2+r^2\sin^2\theta}\right)^2} \\
&= \lim_{r\to+0} \frac{r^{p+q}\cos^p\theta\sin^q\theta}{r^2} = \lim_{r\to+0} r^{p+q-2}\cos^p\theta\sin^q\theta
\end{aligned}$$

となるが，$p+q-2 \geqq 1$ なので $I = 0$ となる。以上により $g(h,k) = 1+3h+3k+3h^2+12hk+6k^2$ が最もよく近似する 2 次式であることが示された。

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ $z = x^3 + y^3, s = x + y, t = xy$ について次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{D(s,t)}{D(x,y)}$ を求めよ。

$\dfrac{\partial s}{\partial x} = 1, \dfrac{\partial s}{\partial y} = 1, \dfrac{\partial t}{\partial x} = y, \dfrac{\partial t}{\partial y} = x$ なので

$$\frac{D(s,t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial s}{\partial x} & \dfrac{\partial s}{\partial y} \\ \dfrac{\partial t}{\partial x} & \dfrac{\partial t}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$$

となる。

(2) $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ を求めよ。

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \left(\frac{D(s,t)}{D(x,y)}\right)^{-1} = \frac{1}{x-y}\begin{pmatrix} x & -1 \\ -y & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ を求めよ。

$\dfrac{\partial x}{\partial s} = \dfrac{x}{x-y}, \dfrac{\partial y}{\partial s} = -\dfrac{y}{x-y}, \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2, \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2$ なので

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \\ &= 3x^2\frac{x}{x-y} - 3y^2\frac{y}{x-y} \\ &= \frac{3(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x-y} \\ &= 3x^2 + 3xy + 3y^2 \end{aligned}$$

となる。

(4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}$ を求めよ。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)\frac{\partial y}{\partial s} \\ &= (6x+3y)\frac{x}{x-y} - (3x+6y)\frac{y}{x-y} \\ &= \frac{6(x-y)(x+y)}{x-y} \\ &= 6(x+y) \end{aligned}$$

となる。

$\boxed{\mathbf{3}}$ $z = f(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2y^2$ について次の問いに答えよ。

(1) $z = f(x, y)$ の臨界点 ($\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ かつ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ となる点) を求めよ。

臨界点は $z_x = 0$ かつ $z_y = 0$ の両方を満たす点である。$z_x = 4x^3 + 4xy^2, z_y = 4y^3 + 4x^2y - 4y$ となるので，$z_x = 0$ より

$$z_x = 0 \iff x^3 + xy^2 = x(x^2 + y^2) = 0 \iff x = 0 \text{ または } x^2 + y^2 = 0$$

となる。

$$x^2 + y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ かつ } y = 0$$

なので

$$z_x = 0 \iff x = 0 \tag{1}$$

となる。式 (1) を $z_y = 0$ に代入すると

$$y^3 - y = y(y-1)(y+1) = 0$$

となるので，$y = 0, \pm 1$ を得る。よって求める臨界点は

$$(x, y) = (0, 0), (0, 1), (0, -1)$$

である。

(2) $z = f(x, y)$ の極値及び極値をとる点を求めよ。

$z_{xx} = 12x^2 + 4y^2, z_{yy} = 12y^2 + 4x^2 - 4, z_{xy} = 8xy$ なのでヘッシャンを $H(x, y)$ とすると

$$\begin{aligned} H(x, y) &= z_{xx}z_{yy} - (z_{xy})^2 \\ &= \left(12x^2 + 4y^2\right)\left(12y^2 + 4x^2 - 4\right) - (8xy)^2 \end{aligned}$$

となるので，$H(0, 1) = H(0, -1) = 32 > 0$，$H(0, 0) = 0$ となる。また $z_{xx}(0, 1) = z_{xx}(0, -1) = 4 > 0$ である。

原点のまわりの関数 $z = f(x, y)$ の様子を調べる。f を x 軸に制限すると，$f(x, 0) = x^4$ となる。この関数は x の関数とみたとき，$\dfrac{d}{dx}f(x, 0) = 4x^3$ より $x = 0$ で極小である。よって原点に十分近い $x \neq 0$ に対し $f(x, 0) > 0 = f(0, 0)$ となっている。f を y 軸に制限すると，$f(0, y) = y^4 - 2y^2$ となる。この関数は y の関数とみたとき，$\dfrac{d}{dy}f(0, y) = 4y^3 - 4y$ より $y = 0$ で極大である。よって原点に十分近い $y \neq 0$ に対し $f(0, y) < 0 = f(0, 0)$ となっている。原点の十分近くに $f(0, 0)$ より大きい値をとる点および小さい値をとる点が存在するので，$(0, 0)$ は極値ではない。

以上により $z = f(x, y)$ は $(x, y) = (0, 1)$ および $(0, -1)$ で極小であり，極値は $f(0, 1) = f(0, -1) = -1$ である。

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の問に答えながら定円に内接する 3 角形のなかで面積最大のものを求めよ。

(1) 点 O を中心とする半径 r の円 O を考える。円周上に 3 点 A, B, C をとる。$\angle AOB = \theta, \angle BOC = \varphi$ とする。3 角形 ABC の面積を S とするとき S を θ, φ を用いて表せ。

$$f(\theta,\varphi) = \frac{1}{2}r^2\left(\sin\theta + \sin\varphi + \sin\left(2\pi - (\theta+\varphi)\right)\right) = \frac{1}{2}r^2\left(\sin\theta + \sin\varphi - \sin\left(\theta+\varphi\right)\right)$$

(2) S を θ, φ に関する 2 変数関数 $f(\theta,\varphi)$ と考えたとき，$S = f(\theta,\varphi)$ の極値を求めよ。

$S=f(\theta,\varphi)$ は θ に関しても周期 2π の周期関数なので $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ の範囲で考える。$f_\theta = \cos\theta - \cos(\theta+\varphi) = 0$ かつ $f_\varphi = \cos\varphi - \cos(\theta+\varphi) = 0$ より $\cos\theta = \cos\varphi$ となるので，$\theta = \varphi$ または $\varphi = 2\pi - \theta$ となる。$\theta = \varphi$ のとき $f_\theta(\theta,\theta) = \cos\theta - \cos 2\theta = \cos\theta - 2\cos^2\theta + 1 = 0$ より $\cos\theta = 1, -\frac{1}{2}$ となる。このとき $(\theta,\varphi) = (0,0), \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right), \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right), (2\pi, 2\pi)$。$\varphi = 2\pi - \theta$ のとき $\cos\theta = \cos(\theta+\varphi) = \cos 2\pi = 1$ より $\theta = 0, 2\pi$ より $(\theta,\varphi) = (0, 2\pi), (2\pi, 0)$。以上で臨界点が求まった。

$\theta + \varphi = a$ とする。$a = 0$ または $a = 2\pi$ または $a = 4\pi$ のとき $f(\theta,\varphi) = \frac{1}{2}r^2(\sin\theta + \sin\varphi - \sin(\theta+\varphi)) = \frac{1}{2}r^2(\sin\theta + \sin(a-\theta) - \sin a) = \frac{1}{2}r^2(\sin\theta - \sin\theta) = 0$ である。臨界点 (θ,φ) を $\theta + \varphi = 0$ または 2π または 4π を満たす点とすると，その点の近くには $f(\theta_1,\varphi_1) = 0 = f(\theta,\varphi)$ を満たす点 (θ_1,φ_1) があるので (θ,φ) は極値を与えない。

ヘッシャンは $H(\theta,\varphi) = (\sin(\theta+\varphi) - \sin\theta)(\sin(\theta+\varphi) - \sin\varphi) - \sin^2(\theta+\varphi)$ なので $H\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{9}{4} > 0$, $H\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{9}{4} > 0$ となる。$\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right), \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ は極値を与える点である。$f\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$, $f\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$ なので極値は $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$ および $-\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$ である。

(3) 円 O に内接する 3 角形の中で面積最大なものが存在することを示し，それを求めよ。

条件より $\theta \geqq 0$ かつ $\varphi \geq 0$ かつ $2\pi - (\theta+\varphi) \geq 0$ となる。よって $\overline{D} = \{\,(\theta,\varphi) \mid \theta \geq 0, \varphi \geq 0, \theta + \varphi \leq 2\pi\,\}$ 上で $f(\theta,\varphi)$ を考える。$f(\theta,\varphi)$ は連続関数であり，$\overline{D}$ は有界閉集合なので，最大値定理より最大値は存在する。最大値をとるのは広義の極値をとる点または境界上の点である。最初に境界上の値を調べる。$\partial\overline{D} = \{\,(\theta,\varphi) \mid \theta = 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\,\} \cup \{\,(\theta,\varphi) \mid \varphi = 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\,\} \cup \{\,(\theta,\varphi) \mid \theta + \varphi = 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\,\}$ である。$\theta = 0$ のとき $f(0,\varphi) = \frac{1}{2}r^2(\sin\varphi - \sin\varphi) = 0$, $\varphi = 0$ のとき $f(\theta, 0) = \frac{1}{2}r^2(\sin\theta - \sin\theta) = 0$, $\theta + \varphi = 0$ のとき $\varphi = -\theta$ なので $f(\theta, -\theta) = \frac{1}{2}r^2(\sin\varphi - \sin\varphi) = 0$ となる。よって境界上での値は 0 である。臨界点は (2) で求めている。この中で境界上の点でなく $\overline{D}$ に含まれているのは $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ だけであり，$f\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$ である。以上により $(\theta,\varphi) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ で最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$ をとる。なおことのとき $\theta = \varphi = 2\pi - (\theta+\varphi) = \frac{2\pi}{3}$ であり，三角形は正三角形である。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (10)。