解析学 I 第 3 回試験

2009–2–18　　河野

注意: ・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。再履修者以外は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 次の問に答えよ。

(1) $y = f(x) = \dfrac{3x^3 + 11x^2 + 14x + 7}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}$ を部分分数展開せよ。

$\dfrac{3x^3 + 11x^2 + 14x + 7}{(x+1)^2(x^2+2x+2)} = \dfrac{Ax+B}{(x+1)^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+2x+2}$ とおくと

$$f(x) = \frac{(A+C)x^3 + (2A+B+2C+D)x^2 + (2A+2B+C+2D)x + (2B+D)}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}$$

となる。これより $A+C = 3, 2A+B+2C+D = 11, 2A+2B+C+2D = 14, 2B+D = 7$ を得るがこれを解いて $A=1, B=2, C=2, D=3$ を得る。よって

$$\frac{3x^3 + 11x^2 + 14x + 7}{(x+1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{x+2}{(x+1)^2} + \frac{2x+3}{x^2+2x+2}$$

積分を考えて予め更に $\dfrac{x+2}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$ としておくのも，勿論正解である。

(2) $I = \displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ。$\displaystyle\int \frac{1}{t^2+1}dt = \arctan t$ を使用してもよい。

$t = x+1$ とおくと $\dfrac{dx}{dt} = 1$ なので

$$\int \frac{x+2}{(x+1)^2}dx = \int \frac{t+1}{t^2}dt = \int \left\{ \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \right\} dt = \log|t| - \frac{1}{t} = \log|x+1| - \frac{1}{x+1}$$

となる。また

$$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}dx = \int \left\{ \frac{(x^2+2x+2)'}{x^2+2x+2} + \frac{1}{x^2+2x+1} \right\} dx = \log|x^2+2x+2| + \int \frac{1}{x^2+2x+2}dx$$

となるが，積分の第 2 項は $t = x+1$ とおくと $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+1}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx = \int \frac{1}{t^2+1}dt = \arctan t = \arctan(x+1)$ となるので

$$I = \log|x+1| - \frac{1}{x+1} + \log(x^2+2x+2) + \arctan(x+1)$$

となる。なお x^2+2x+2 は常に正であるので絶対値記号を外したが，絶対値記号がついていても間違いではない。

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ 不定積分

$$\int \sqrt{x^2-1}dx$$

を次にしたがって求めよ。

(1) $\sqrt{x^2-1}=t-x$ とおき x を t を用いて表せ。

両辺を 2 乗して $x^2-1=t^2-2tx+x^2$ より $x=\dfrac{1+t^2}{2t}$ を得る。

(2) $\sqrt{x^2-1}$ を t を用いて表せ。

$\sqrt{x^2-1}=t-x=t-\dfrac{1+t^2}{2t}=\dfrac{t^2-1}{2t}$ である。

(3) $\dfrac{dx}{dt}$ を求めよ。

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t^2-1}{2t^2}$ となる。

(4) 不定積分 I を求めよ。

$$\begin{aligned}I&=\int\sqrt{x^2-1}dx=\int\frac{t^2-1}{2t}\frac{dx}{dt}dt=\int\frac{t^2-1}{2t}\frac{t^2-1}{2t^2}dt=\frac{1}{4}\int\frac{t^4-2t^2+1}{t^3}dt\\&=\frac{1}{4}\int\left\{t-2\frac{1}{t}+\frac{1}{t^3}\right\}dt=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}t^2-2\log|t|-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2}\right)\end{aligned}$$

となる。$t=\sqrt{x^2-1}+x$ なので $t^2=x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}+x^2$ であり,

$$\begin{aligned}\frac{1}{t^2}&=\frac{1}{2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}}=\frac{2x^2-1-2x\sqrt{x^2-1}}{(2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1})(2x^2-1-2x\sqrt{x^2-1})}\\&=\frac{2x^2-1-2x\sqrt{x^2-1}}{(2x^2-1)^2-4x^2\left(\sqrt{x^2-2}\right)^2}=2x^2-1-2x\sqrt{x^2-1}\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\left(2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}-\left(2x^2-1-2x\sqrt{x^2-1}\right)\right)-\log|\sqrt{x^2-1}+x|\right)\\&=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\log\left|\sqrt{x^2-1}+x\right|\end{aligned}$$

となる。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 空気中を落下する物体に働く空気の抵抗は速度の 2 乗に比例する。この比例定数を k とする。重力定数を g とし，質量を m とし，速度を v とするとき v が満たすべき微分方程式を求めよ。質量 m の質点に力 F が働いているとき生じる加速度 a は運動方程式

$$F = ma$$

で与えられる。

下向きを正の方向とすると働く力 F は $F = mg - kv^2$ なので求める微分方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$

となる。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 微分方程式

$$y'' - 4y' + 5y = 0 \tag{1}$$

について次の問に答えよ。

(1)　微分方程式 (1) を複素数値関数の範囲で解け。

与えられた微分方程式は微分演算子 D を用いて $(D^2 - 4D + 5)y = 0$ と書ける。

$\alpha = 2 + i, \beta = 2 - i$ とおくと，$\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = 5$ より $D^2 - 4D + 5 = (D - \alpha)(D - \beta)$ と書ける。$u = (D - \beta)y$ とおくと u に関する微分方程式 $(D - \alpha)u = 0$ が得られる。$D - \alpha = e^{\alpha x}De^{-\alpha x}$ を用いて変形すると

$$e^{\alpha x}D(e^{-\alpha x}u) = 0$$

となる。両辺に $e^{-\alpha x}$ をかけて積分すると (積分定数を C_1 として) $e^{-\alpha x}u = C_1$ より $u = C_1e^{\alpha x}$ が得られる。

$u = (D - \beta)y$ なので $D - \beta = e^{\beta x}De^{-\beta x}$ を用いると $e^{\beta x}De^{-\beta x}y = C_1e^{\alpha x}$ となる。$e^{-\beta x}$ を両辺にかけて

$$D(e^{-\beta x}y) = C_1e^{(\alpha-\beta)x}$$

を積分すると (積分定数を C_2 として)，$e^{-\beta x}y = \dfrac{C_1}{\alpha - \beta}e^{(\alpha-\beta)x} + C_2$ なる。よって一般解は

$$y = \frac{C_1}{2i}e^{(2+i)x} + C_2e^{(2-i)x}$$

となる。定数を置き直して $y = C_1e^{(2+i)x} + C_2e^{(2-i)x}$ とする (そのままでも勿論正解です)。

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

(2)　微分方程式 (1) の実数値関数としての一般解を求めよ。一般解であることの証明ができるものはそのことも示せ。

$C_1 = C_2 = \dfrac{1}{2}$ とすると $y_1 = \dfrac{1}{2}\left(e^{(2+i)x} + e^{(2-i)x}\right) = \dfrac{1}{2}\left(e^{2x}(\cos x + i\sin x) + e^{2x}(\cos(-x) + i\sin(-x))\right) = e^{2x}\cos x$ となるが y_1 は微分方程式 (1) の解である。

$C_1 = \dfrac{1}{2i}, C_2 = -\dfrac{1}{2i}$ とすると $y_2 = \dfrac{1}{2i}\left(e^{(2+i)x} - e^{(2-i)x}\right) = \dfrac{1}{2i}\left(e^{2x}(\cos x + i\sin x) - e^{2x}(\cos(-x) + i\sin(-x))\right) = e^{2x}\sin x$ となるが y_2 は微分方程式 (1) の解である。よって一般解は

$$C_1y_1 + C_2y_2 = C_1e^{2x}\cos x + C_2e^{2x}\sin x$$

と予想される。

$A = \left\{ C_1e^{2x}\cos x + C_2e^{2x}\sin x \,\middle|\, C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}$，$B = \{ y \mid y$ は微分方程式 (1) の解$, y$ は実数値関数$\}$ とするとき $A = B$ を示せばよい。y_1, y_2 は微分方程式 (1) の解なので $(D^2-4D+5)y_1 = 0$ および $(D^2-4D+5)y_2 = 0$ が成立している。A の任意の元 y は実数 C_1, C_2 を用いて $y = C_1y_1 + C_2y_2$ と書けるので，y は実数値関数であり，

$$(D^2-4D+5)y = (D^2-4D+5)(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1(D^2-4D+5)y_1 + C_2(D^2-4D+5)y_2 = 0 + 0 = 0$$

となるので微分法方程式の解である。なお式変形の途中で線型微分方程式の線型性を用いた。よって $y \in B$ となる。故に $A \subseteq B$ が成立している。

逆に y を B の任意の元とする。このとき $z = y(0)y_1 + (y'(0) - 2y(0))y_2$ は A の元であるがすでに示したことから微分方程式 (1) の解である。このとき y および z は微分方程式の解であり，$y(0) = z(0)$ かつ $y'(0) = z'(0)$ が成立している。よって微分方程式の解の一意性より $y = z$ となる。よって $y \in A$ となり $B \subseteq A$ となる。以上により $A = B$ が示されたので

$$C_1y_1 + C_2y_2 = C_1e^{2x}\cos x + C_2e^{2x}\sin x$$

は微分方程式 (1) の実数値関数としての一般解である。