

- 注意:
- ・ 答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に、数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
 - ・ 採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては白紙答案より低い点数になる場合がある。careless miss でそのような事はないが、「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
 - ・ 内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
 - ・ 在籍番号欄について：再履修者は10桁の在籍番号を書く事。再履修者以外は出席番号(多くは2桁)でよい。

1 $y = x^2 + x$ を定義に基づき微分せよ。

$$\begin{aligned}y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + (x+h) - x^2 - x}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + x + h - x^2 - x}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 + h}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h + 1) \\&= 2x + 1\end{aligned}$$

2 $y = e^{2x} \sin 5x^2$ を微分せよ。諸公式を用いてよい。

積の微分法と合成関数の微分法を用いると次のようになる。

$$\begin{aligned}y' &= (e^{2x})' \sin 5x^2 + e^{2x} (\sin 5x^2)' \\&= 2e^{2x} \sin 5x^2 + e^{2x} (5x^2)' \cos 5x^2 \\&= 2e^{2x} \sin 5x^2 + 10xe^{2x} \cos 5x^2\end{aligned}$$

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学		在		氏	
科		籍		名	
		号			

3 関数 $y = f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ とするとき次の間に答えよ。

(1) $\varepsilon(h) = \frac{f(a+h) - (A+Bh)}{h}$ とおく。 $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ が成立するとき $A+Bh$ を $x=a$ で $y=f(x)$ を一番よく近似する 1 次式という。 $x=0$ で $y=f(x)$ を一番よく近似する 1 次式を求めよ。

$\lim_{h \rightarrow 0} h\varepsilon(h) = 0$ より $\lim_{h \rightarrow 0} h\varepsilon(h) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(0+h) - (A+Bh)) = f(0) - A = 0$ 。 よって $A = f(0) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - (A+Bh)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos\left(h + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} - Bh}{h} \quad (\text{ここでロピタルの定理を使用}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin\left(h + \frac{\pi}{4}\right) - B}{1} = -\sin \frac{\pi}{4} - B = -\frac{1}{\sqrt{2}} - B \end{aligned}$$

となるが, $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ より $B = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ である。 よって求める 1 次式は $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}h$ である。

(2) $\varepsilon(h) = \frac{f(a+h) - (A+Bh+Ch^2)}{h^2}$ とおくとき $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ が成立するとき $A+Bh+Ch^2$ を $x=a$ で $y=f(x)$ を一番よく近似する 2 次式という。 $x=0$ で $y=f(x)$ を一番よく近似する 2 次式を求めよ。

$\lim_{h \rightarrow 0} h^2\varepsilon(h) = 0$ より $\lim_{h \rightarrow 0} h^2\varepsilon(h) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(0+h) - (A+Bh+Ch^2)) = f(0) - A = 0$ 。 よって $A = f(0) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} h\varepsilon(h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - (A+Bh+Ch^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos\left(h + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} - Bh - Ch^2}{h} \quad (\text{ここでロピタルの定理を使用}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin\left(h + \frac{\pi}{4}\right) - B - 2Ch}{1} = -\sin \frac{\pi}{4} - B = -\frac{1}{\sqrt{2}} - B \end{aligned}$$

となるが, $\lim_{h \rightarrow 0} h\varepsilon(h) = 0$ より $B = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ である。

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - (A+Bh+Ch^2)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos\left(h + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}h - Ch^2}{h^2} \quad (\text{ここでロピタルの定理を使用}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin\left(h + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} - 2Ch}{2h} \quad (\text{ここで再びロピタルの定理を使用}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\cos\left(h + \frac{\pi}{4}\right) - 2C}{2} = -\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4} - C = -\frac{1}{2\sqrt{2}} - C \end{aligned}$$

となるが, $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ より $C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ である。 よって求める 2 次式は $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}h - \frac{1}{2\sqrt{2}}h^2$ である。

4 $y = f(x) = \frac{1}{x+2}$ を $x = 1$ でテーラー展開することを考える。次の問いに答えながら、テーラー展開を求めよ。

(1) $f'(x)$ および $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$ を求めよ。

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}, f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}, f^{(3)}(x) = -\frac{6}{(x+2)^4} \text{ である。}$$

(2) 自然数 n に対し $f^{(n)}(x)$ を予想し、それが正しいことを数学的帰納法で証明せよ。

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x+2)^{n+1}} \text{ と予想される。}$$

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} = (-1)^1 \frac{1!}{(x+2)^{1+1}} \text{ となるので } n = 1 \text{ のとき成立している。}$$

$n = k$ のとき成立を仮定する。即ち $f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{k!}{(x+2)^{k+1}}$ を仮定する。この両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left((-1)^k \frac{k!}{(x+2)^{k+1}} \right)' \\ &= (-1)^k \frac{-(k+1)k!}{(x+2)^{k+2}} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{(k+1)!}{(x+2)^{k+2}} \end{aligned}$$

となるので $k+1$ のときも成立している。

(3) $y = f(x) = \frac{1}{x+2}$ を $x = 1$ でテーラー展開せよ。

$$f(1) = \frac{1}{3}, f'(1) = -\frac{1}{3^2}, f''(1) = \frac{2}{3^3}, f^{(n)}(1) = (-1)^n \frac{n!}{3^{n+1}} \text{ なので}$$

$$f(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2}(x-1) + \frac{1}{3^3}(x-1)^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{3^{n+1}}(x-1)^n + \cdots$$

である。

シグマを用いて

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^{n+1}} (x-1)^n$$

でも勿論よい。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学 科		在 番 籍 号		氏 名	
--------	--	------------------	--	--------	--

5 次の関数の凹凸を調べ、増減表を書き、グラフの概形を書け。

$$y = f(x) = e^{-x^2}$$

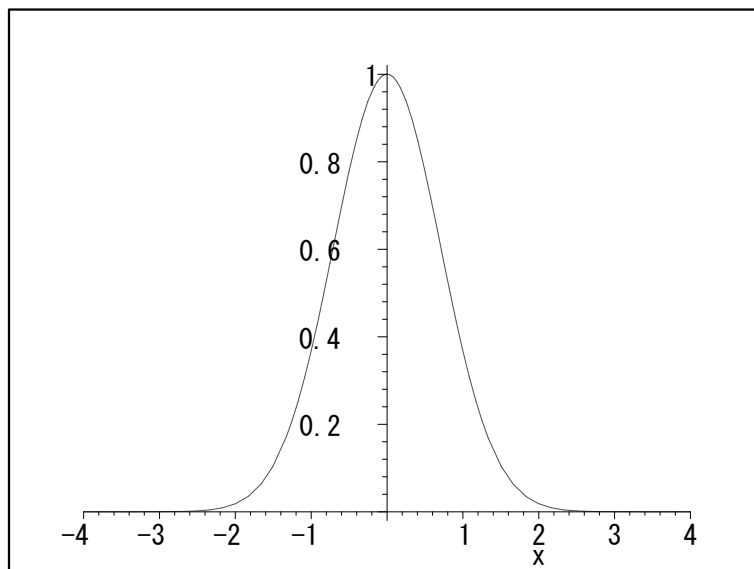
$f'(x) = -2xe^{-x^2}$, $f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$ となっている。 $f'(x) = 0$ を解いて $x = 0$ を得る。 $f''(x) = 0$ を解いて $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ を得る。
よって増減表は次のようになる。

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
y'	+	+	+	0	-	-	-
y''	+	0	-	-	-	0	+
y	↗		↘		↘		↘

グラフは x 軸とは交わらない。 y 軸との交点は $y = 1$ である。また

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$$

なのでグラフの概形は次のようになる。



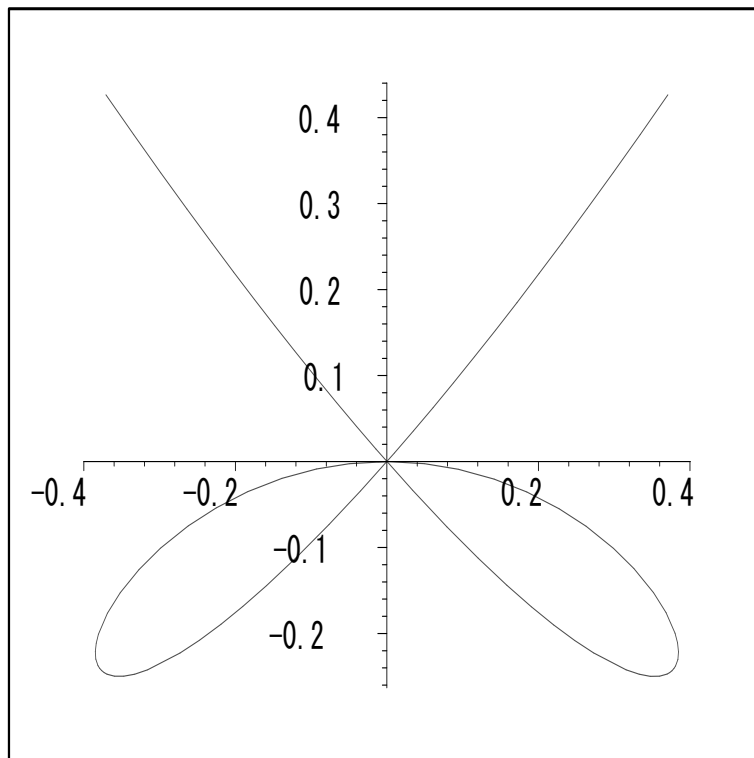
6 次の様にパラメータ表示された曲線の概形を書け。

$$x = x(t) = t^3 - t, \quad y = y(t) = t^4 - t^2$$

$x'(t) = 3t^2 - 1 = 0$ より $t = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ となる。 $y'(t) = 4t^3 - 2t = 2t(2t^2 - 1) = 0$ より $t = -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。増減表を書くと

t		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$x'(t)$	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$x(t)$	→	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	→	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	←	0	←	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	→	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	→
$y'(t)$	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$y(t)$	↓	$-\frac{1}{4}$	↑	$-\frac{2}{9}$	↑	0	↓	$-\frac{2}{9}$	↓	$-\frac{1}{4}$	↑
曲線	↘	→	↗	↑	↖	←	↙	↓	↘	→	↗

となる。 x 軸との交わりは $y(t) = 0$ を解いて $t = -1, 0, 1$, y 軸との交わりは $x(t) = 0$ を解いて $t = -1, 0, 1$ であり, この点はいずれも原点である。これを元に曲線を描くと次図のようになる。



別紙にも問題あり

学科		在番 籍号		氏名	
----	--	----------	--	----	--