# 解析学 I 第 2 回試験

2010–1–30　　河野

**注意**: ・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。再履修者以外は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

**1** 次の問いに答えよ。

**(1)** $z = f(x,y) = (x+1)^2(y+2)^3$ とする。定義に基づき $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を求めよ。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h+1)^2(y+2)^3-(x+1)^2(y+2)^3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(x^2+2xh+h^2+2x+2h+1-x^2-2x-1\right)(y+2)^3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(2xh+h^2+2h\right)(y+2)^3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h\,(2x+h+2)\,(y+2)^3}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h+2)\,(y+2)^3\\
&= 2(x+1)(y+2)^3
\end{aligned}
$$

**(2)** $z = f(x,y) = e^{xy}\sin(x^2+y^2)$ に対し $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を求めよ。微分の諸公式を使用してよい。

$g(x,y)$ の $x$ による偏導関数を $(g(x,y))_x$ と書く。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \left(e^{xy}\right)_x\sin(x^2+y^2) + e^{xy}\left(\sin(x^2+y^2)\right)_x\\
&= ye^{xy}\sin(x^2+y^2) + 2xe^{xy}\cos(x^2+y^2)
\end{aligned}
$$

**裏にも問題有り。別紙にも問題あり**

| 学科 | | 在籍番号 | | 氏名 | |
|---|---|---|---|---|---|

$\boxed{\mathbf{2}}$ $z=f(x,y)=(x-1)^4(y+2)^3$ とする。$f(h,k)$ を $(0,0)$ で一番よく近似する $n$ 次式 $g(h,k)$ とは，$g(h,k)$ が $h,k$ に関する $n$ 次式で，$\varepsilon(h,k)=\dfrac{f(h,k)-g(h,k)}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^n}$ とおくとき $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$ が成立するときをいう。このとき次の問に答えよ。このとき「$\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}D^jf(x,y)$ が $(x,y)$ で $f(x+h,y+k)$ を最もよく近似する $n$ 次式である」という定理を用いてもよいが，用いずに出来るものは用いずに解答すること。

(1) $f(h,k)$ を $(0,0)$ で最もよく近似する 1 次式を求めよ。

$f_x(x,y)=4(x-1)^3(y+2)^3$，$f_y(x,y)=3(x-1)^4(y+2)^2$ より $f(0,0)=8, f_x(0,0)=-32, f_y(0,0)=12$ となる。$Df(0,0)=hf_x(0,0)+kf_y(0,0)=-32h+12k$ より

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{1}D^jf(0,0)&=D^0f(0,0)+D^1f(0,0)=f(0,0)+Df(0,0)\\&=8-32h+12k\end{aligned}$$

が求める 1 次式である。以上は定理を用いた解答である。定理を用いない場合は上記に加え次の記述が必要になる。

$\varepsilon(h,k)=\dfrac{(h-1)^4(k+2)^3-(8-32h+12k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ とおくと，

$$(\text{分子})=(h^4-4h^3+6h^2)(k+2)^3+(k^3+6k^2)(-4h+1)-48hk$$

となる。分子の各項は $h^ik^j$ $(i+j\geqq 2)$ の形をしている。$h=r\cos\theta, k=r\sin\theta$ と極座標表示すると $(h,k)\to(0,0)$ のとき $r\to 0$ となるので

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^ik^j}{\sqrt{h^2+k^2}}&=\lim_{r\to0}\frac{r^i\cos^i\theta r^j\sin^j\theta}{\sqrt{r^2\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta}}=\lim_{r\to0}\frac{r^{i+j}\cos^i\theta\sin^j\theta}{r}\\&=\lim_{r\to0}r^{i+j-1}\cos^i\theta\sin^j\theta\end{aligned}$$

であるが，$i+j-1\geqq1$ なので $\theta$ の値によらず極限は 0 になる。よって $\displaystyle\lim_{h\to0}\varepsilon(h,k)=0$ となり $8-32h+12k$ が最もよく近似する 1 次式であることが分かる。

(2) $f(h,k)$ を $(0,0)$ で最もよく近似する 2 次式を求めよ。

$f_{xx}=12(x-1)^2(y+2)^3$，$f_{xy}=12(x-1)^3(y+2)^2$，$f_{yy}=6(x-1)^4(y+2)$ より $f_{xx}(0,0)=96, f_{xy}(0,0)=-48, f_{yy}(0,0)=12$ より $D^2f(0,0)=\dfrac{1}{2}\left(h^2f_xx(0,0)+2hkf_{xy}(0,0)+k^2f_{yy}(0,0)\right)=48h^2-48hk+6k^2$ より

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{2}D^jf(0,0)&=D^0f(0,0)+D^1f(0,0)+D^2f(0,0)=f(0,0)+Df(0,0)+D^2f(0,0)\\&=8-32h+12k+48h^2-48hk+6k^2\end{aligned}$$

が求める 2 次式である。以上は定理を用いた解答である。定理を用いない場合は上記に加え次の記述が必要になる。

$\varepsilon(h,k)=\dfrac{(h-1)^4(k+2)^3-\left(8-32h+12k+48h^2-48hk+6k^2\right)}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^2}$ とおくと，

$$(\text{分子})=(h^4-4h^3)(k+2)^3+(6h^2-4h+1)k^3+36h^2k^2+72h^2k-24kh^2$$

となる。分子の各項は $h^ik^j$ $(i+j\geqq 3)$ の形をしている。$h=r\cos\theta, k=r\sin\theta$ と極座標表示すると $(h,k)\to(0,0)$ のとき $r\to 0$ となるので

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^ik^j}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^2}&=\lim_{r\to0}\frac{r^i\cos^i\theta r^j\sin^j\theta}{r^2\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta}=\lim_{r\to0}\frac{r^{i+j}\cos^i\theta\sin^j\theta}{r^2}\\&=\lim_{r\to0}r^{i+j-2}\cos^i\theta\sin^j\theta\end{aligned}$$

であるが，$i+j-2\geqq1$ なので $\theta$ の値によらず極限は 0 になる。よって $\displaystyle\lim_{h\to0}\varepsilon(h,k)=0$ となり $8-32h+12k+48h^2-48hk+6k^2$ が最もよく近似する 2 次式であることが分かる。

$\boxed{\mathbf{3}}$ $z = x^3 + y^3, s = x\cos y, t = x\sin y$ について次の問いに答えよ。

**(1)** $\dfrac{D(s,t)}{D(x,y)}$ を求めよ。

$$\frac{D(s,t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{pmatrix}$$

**(2)** $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ を求めよ。

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \left(\frac{D(s,t)}{D(x,y)}\right)^{-1} = \frac{1}{x}\begin{pmatrix} x\cos y & x\sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\dfrac{1}{x}\sin y & \dfrac{1}{x}\cos y \end{pmatrix}$$

**(3)** $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ を求めよ。

$z_x = 3x^2,\ \ z_y = 3y^2$ より

$$\begin{aligned} z_s &= z_x x_s + z_y y_s \\ &= 3x^2\cos y - \frac{3y^2}{x}\sin y \end{aligned}$$

となる。

**(4)** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}$ を求めよ。

$u = z_s$ とおくと $u_x = 6x\cos y + \dfrac{3y^2}{x^2}\sin y,\ \ u_y = -3x^2\sin y - \dfrac{6y}{x}\sin y - \dfrac{3y^2}{x}\cos y$ となる。

$$\begin{aligned} z_{ss} = u_s &= u_x xs + u_y y_s \\ &= \left(6x\cos y + \frac{3y^2}{x^2}\sin y\right)\cos y - \left(3x^2\sin y + \frac{6y}{x}\sin y + \frac{3y^2}{x}\cos y\right)\left(-\frac{1}{x}\sin y\right) \\ &= 6x\cos^2 y + \frac{6y^2}{x^2}\sin y\cos y + \left(3x + \frac{6y}{x^2}\right)\sin^2 y \end{aligned}$$

となる。

**裏にも問題有り。別紙にも問題あり**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 学科 | | 在籍番号 | | 氏名 | |

**4** $z = f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 4x^2 - 2y^2$ について次の問いに答えよ。

(1) $z = f(x,y)$ の臨界点 ($\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ かつ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ となる点) を求めよ。

$z_x = 4x^3 + 4xy^2 - 8x$, $z_y = 4y^3 + 4x^2y - 4y$ である。$z_x = 4x(x^2 + y^2 - 2) = 0$ より $x = 0$ または $x^2 + y^2 - 2 = 0$ が成立している。また $z_y = 4y(y^2 + x^2 - 1) = 0$ より $y = 0$ または $x^2 + y^2 - 1 = 0$ が成立している。このとき (1) $x = 0$ かつ $y = 0$, (2) $x = 0$ かつ $x^2 + y^2 - 1 = 0$, (3) $x^2 + y^2 - 2 = 0$ かつ $y = 0$, (4) $x^2 + y^2 - 2 = 0$ かつ $x^2 + y^2 - 1 = 0$ の 4 つの場合に分けられる。

(1) のときは $(x,y) = (0,0)$ である。(2) のときは $x = 0$ を $x^2 + y^2 - 1 = 0$ に代入することにより $y = \pm 1$ となる。よって $(x,y) = (0,\pm 1)$ である。(3) のときは $y = 0$ を $x^2 + y^2 - 2 = 0$ に代入することにより $x = \pm\sqrt{2}$ となる。よって $(x,y) = (\pm\sqrt{2}, 0)$ である。(4) を満たす $x, y$ は存在しない。

以上により臨界点は

$$(x,y) = (0,0), (0,1), (0,-1), (\sqrt{2},0), (-\sqrt{2},0)$$

である。

(2) $z = f(x,y)$ の極値及び極値をとる点を求めよ。

$z_{xx} = 4(3x^2 + y^2 - 2)$, $z_{xy} = 8xy$, $z_{yy}4(3y^2 + x^2 - 1)$ よりヘッシャンは

$$H(x,y) = 16(3x^2 + y^2 - 2)(3y^2 + x^2 - 1) - 64x^2y^2$$

となる。

$$H(0,0) = 32 > 0$$
$$H(0,\pm 1) = -32 < 0$$
$$H(\pm\sqrt{2},0) = 64 > 0$$

となるので極値をとる点は

$$(x,y) = (0,0), (\sqrt{2},0), (-\sqrt{2},0)$$

であり，極値は

$$z(0,0) = 0, \quad z(\sqrt{2},0) = -4, \quad z(-\sqrt{2},0) = -4$$

である。

**5** 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (10)。