解析学 I 第 3 回試験

2010–2–17　　河野

注意: ・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。再履修者以外は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 次の問に答えよ。

(1) $y = f(x) = \dfrac{2(x^3+4x^2+7x+6)}{(x+1)^2(x^2+2x+5)}$ を部分分数展開せよ。

$\dfrac{2(x^3+4x^2+7x+6)}{(x+1)^2(x^2+2x+5)} = \dfrac{Ax+B}{(x+1)^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+2x+5}$ とおいて通分した分子の恒等式を比較することにより

$$\frac{x+2}{(x+1)^2} + \frac{x+2}{x^2+2x+5}$$

を得る。$x+2 = (x+1)\cdot 1 + 1$ より $\dfrac{x+2}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+1)\cdot 1+1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$ として

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x+2}{x^2+2x+5}$$

としてもよい。

(2) $I = \displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ。$\displaystyle\int \frac{1}{t^2+1}dt = \arctan t$ を使用してもよい。

$x^2+2x+5 = (x+1)^2+4$ なので $t = x+1$ とおくと $\dfrac{dx}{dt} = 1$ より

$$I_1 = \int \frac{x+2}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{t+1}{t^2+4}dt = \int \frac{t}{t^2+4}dt + \int \frac{1}{t^2+4}dt$$

となる。前者の積分は $u = t^2+4$ とおくと $\dfrac{du}{dt} = 2t$ より

$$J_1 = \int \frac{t}{t^2+4}dt = \int \frac{t}{u}\frac{1}{2t}du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\log|u| = \frac{1}{2}\log|x^2+2x+5|$$

となる。後者は $t = 2u$ とおくと $\dfrac{dt}{du} = 2$ なので

$$J_2 = \int \frac{1}{t^2+4}dt = \int \frac{1}{4u^2+4}2du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}du = \frac{1}{2}\arctan u = \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} I &= \int \left\{ \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x+2}{x^2+2x+5} \right\} dx \\ &= \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{1}{(x+1)^2}dx + I_1 \\ &= \log|x+1| - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\log|x^2+2x+5| + \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2} \end{aligned}$$

となる。

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ 不定積分

$$I = \int \sqrt{x^2+1}dx$$

を次にしたがって求めよ。

(1) $\sqrt{x^2+1} = t - x$ とおき x を t を用いて表せ。

両辺を 2 乗して $x^2+1 = t^2 - 2tx + x^2$ より

$$x = \frac{t^2-1}{2t}$$

(2) $\sqrt{x^2+1}$ を t を用いて表せ。

$$\sqrt{x^2+1} = t - x = t - \frac{t^2-1}{2t} = \frac{t^2+1}{2t}$$

(3) $\dfrac{dx}{dt}$ を求めよ。

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t^2+1}{2t^2}$$

(4) 不定積分 I を求めよ。

$$\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{x^2+1}dx = \int \frac{t^2+1}{2t}\frac{t^2+1}{2t^2}dt \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{t^4+2t^2+1}{t^3}dt = \frac{1}{4}\int \left\{t + 2\frac{1}{t} + \frac{1}{t^3}\right\}dt \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}t^2 + 2\log|t| - \frac{1}{2t^2}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2 + \frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \frac{1}{8}\frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})^2}
\end{aligned}$$

となる。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 微分方程式

$$y' + y\cos x = 0$$

を解け。

$\dfrac{dy}{dx} = -y\cos x$ より $\dfrac{1}{y}dy = -\cos x dx$ となる。両辺を積分して $\displaystyle\int \frac{1}{y}dy = \int -\cos x dx$ より $\log|y| = -\sin x + C$ となる。

$$|y| = e^{\log|y|} = e^{-\sin x + C} = e^{-\sin x}e^{C}$$

より $y = \pm e^{C}e^{-\sin x}$ となる。$\pm e^{C}$ をあらためて C とおくと

$$y = Ce^{-\sin x}$$

が得られる。

ここでは変数分離型で解いたが，演算子法でもできる。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 微分方程式

$$y'' - 2y' + 5y = 0 \tag{1}$$

について次の問に答えよ。

(1)　微分方程式 (1) を複素数値関数の範囲で解け。

微分方程式は演算子を用いて $(D^2 - 2D + 5)y = 0$ と書ける。$t^2 - 2t + 5 = 0$ の解は $\alpha = 1 + 2i, \beta = 1 - 2i$ なので $D^2 - 2D + 5 = (D - \alpha)(D - \beta)$ と書ける。微分方程式は $(D - \alpha)(D - \beta)y = 0$ となる。$u = (D - \beta)y$ とおくと $(D - \alpha)u = 0$ となる。

ここで $D - \alpha = e^{\alpha x}De^{-\alpha x}$ が成立しているので $e^{\alpha x}De^{-\alpha x}u = 0$ を得る。両辺に $e^{-\alpha x}$ をかけることにより $De^{-\alpha x}u = 0$ となる。$e^{-\alpha x}u = \displaystyle\int 0dx$ は定数なので C_1 とおくと $u = C_1e^{\alpha x}$ となる。よって

$$(D - \beta)y = u = C_1e^{\alpha x}$$

を解けばよい。$D - \beta = e^{\beta x}De^{-\beta x}$ より

$$e^{\beta x}De^{-\beta x}y = C_1e^{\alpha x}$$

を得る。両辺に $e^{-\beta x}$ をかけると $De^{-\beta x}y = C_1e^{(\alpha-\beta)x}$ となるので

$$e^{-\beta x}y = \int C_1e^{(\alpha-\beta)x}dx = \frac{C_1}{\alpha - \beta}e^{(\alpha-\beta)x} + C_2$$

$$y = \frac{C_1}{\alpha - \beta}e^{\alpha x} + C_2e^{\beta x}$$

となる。$\dfrac{C_1}{\alpha - \beta}$ をあらためて C_1 とおくと一般解

$$y = C_1e^{(1+2i)x} + C_2e^{(1-2i)x}$$

が得られる。

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

(2)　微分方程式 (1) の実数値関数としての一般解を求めよ。一般解であることの証明ができるものはそのことも示せ。

オイラーの公式「$e^{ix} = \cos x + i\sin x$」を用いると複素数値関数としての一般解は

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{(1+2i)x} + C_2 e^{(1-2i)x} = C_1 e^x e^{i2x} + C_2 e^x e^{-i2x} \\ &= C_1 e^x (\cos 2x + i\sin 2x) + C_2 e^x (\cos(-2x) + i\sin(-2x)) \\ &= C_1 e^x (\cos 2x + i\sin 2x) + C_2 e^x (\cos 2x - i\sin 2x) \end{aligned}$$

となる。$C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$ とおくと特殊解

$$y_1 = e^x \cos 2x$$

が得られる。$C_1 = -C_2 = \frac{1}{2i}$ とおくと特殊解

$$y_2 = e^x \sin 2x$$

が得られる。よって一般解は

$$y = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x$$

である。

ここまででは求めた解が一般解であることを示してない。それを示すとボーナス点が与えられる。

$A = \{\, y \mid y'' - 2y' + 5y = 0 \,\}$, $B = \{\, y = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x \mid C_1, C_2 \text{は定数} \,\}$ とおくとき $A = B$ を示せば一般解であることが分かる。そのためには (1) $B \subseteq A$ および，(2) $A \subseteq B$ を示せばよい。$\forall y \in B$ とすると $y = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x$ と書けている。このとき $y' = C_1 e^x \cos 2x - C_1 e^x 2\sin 2x + C_2 e^x \sin 2x + C_2 e^x 2\cos 2x = (C_1 + 2C_2)e^x \cos 2x + (-2C_1 + C_2)e^x \sin 2x$, $y'' = (-3C_1 + 4C_2)e^x \cos 2x + (-4C_1 - 3C_2)e^x \sin 2x$ となるので

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + 5y =& (-3C_1 + 4C_2)e^x \cos 2x + (-4C_1 - 3C_2)e^x \sin 2x - 2\left((C_1 + 2C_2)e^x \cos 2x + (-2C_1 + C_2)e^x \sin 2x\right) \\ &+ 5\left(C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x\right) \\ =& \left(-3C_1 + 4C_2 - 2C_1 - 4C_2 + 5C_1\right) e^x \cos 2x + \left(-4C_1 - 3C_2 + 4C_1 - 2C_2 + 5C_2\right) e^x \sin 2x \\ =& 0 \end{aligned}$$

となるよって $y \in A$ である。よって (1) が示された。

$\forall y \in A$ とする。ここで予備的計算をする。この部分は解答として書かなくてもよい。y が B にはいっているとき，即ち $y = y(x) = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x$ となっているとする。このとき $x = 0$ を代入すると，$y(0) = C_1$ となる。y を x で微分すると $y' = (C_1 + 2C_2)e^x \cos 2x + (-2C_1 + C_2)e^x \sin 2x$ となるので $x = 0$ を代入すると $y'(0) = C_1 + C_2$ となり，$C_2 = \frac{y'(0) - y(0)}{2}$ となる。

$z = y(0)e^x \cos 2x + \frac{y'(0) - y(0)}{2} e^x \sin 2x$ とおくと $z \in B$ である。また

$$z' = y(0)e^x \cos 2x - 2y(0)e^x \sin 2x + \frac{y'(0) - y(0)}{2} e^x \sin 2x + (y'(0) - y(0))e^x \cos 2x$$

より $z(0) = y(0)$, $z(0) = y(0) + y'(0) - y(0) = y'(0)$ となる。y および z は微分方程式 $y'' - 2y' + 5y = 0$ の解であり，$y(0) = z(0)$ かつ $y'(0) = z'(0)$ となるので，微分方程式の解の一意性より $y = z$ となる。よって $y = z \in B$ となり (2) が示される。