解析学II 第2回試験　　2009–8–3　　河野

注意:　・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。再履修者以外は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 (1) 領域 $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d \right\}$ を長方形領域とする。連続な関数 $f(x, y)$ の D における重積分 $\displaystyle\iint_D f(x, y)dxdy$ の定義を述べよ。可能なものは連続な関数ではなく有界な関数に対する定義を述べよ (どちらの関数に関しての定義か明記すること)。

有界な関数に対する定義を述べる。: $\Delta = \{ x_0, x_1, \ldots, x_m \,;\, y_0, y_1, \ldots, y_n \}$ を長方形領域 D の分割とする。即ち $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b$，$c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = d$ が成立しているとする。$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ とする。分割の最大幅 $|\Delta|$ を $|\Delta| = \max \{ \Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m, \Delta y_1, \ldots, \Delta y_n \}$ とおく。$M_{ij} = \sup \{ f(x, y) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j \}$，$m_{ij} = \inf \{ f(x, y) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j \}$ とする。ただし sup, inf はそれぞれ上限，下限とする。$S(\Delta) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$，$s(\Delta) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$ とする。分割を細かくした極限を考える。即ち $|\Delta| \to 0$ を考える。$\displaystyle\lim_{|\Delta| \to 0} S(\Delta) = \lim_{|\Delta| \to 0} s(\Delta)$ が成立するとき $f(x, y)$ は D で積分可能であるといい，この極限値を $\displaystyle\iint_D f(x, y)dxdy$ と表す。

(2) $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq 2, 2 \leqq y \leqq 4 \right\}$ とする。重積分

$$\iint_D x dxdy$$

を定義に基づき計算せよ。

D の n 等分割 Δ_n を考える。即ち $x_i = \dfrac{2i}{n}$，$y_j = 2 + \dfrac{2j}{n}$ を考える。また $\Delta x_i = \dfrac{2}{n}$，$\Delta y_j = \dfrac{2}{n}$ である。$|\Delta_n| = \dfrac{2}{n}$ なので $|\Delta_n| \to 0$ と $n \to \infty$ は同じである。$f(x, y) = x$ とおくと $f(x, y)$ は D で x に関し単調増加である。よって $M_{ij} = f(x_i, y) = x_i = \dfrac{2i}{n}$，$m_{ij} = f(x_{i-1}, y) = x_{i-1} = \dfrac{2(i-1)}{n}$ なので

$$S(\Delta_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{2i}{n} \frac{2}{n} \frac{2}{n} = \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} i = \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^{n} in = \frac{8}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{8}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = 4\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$s(\Delta_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{2(i-1)}{n} \frac{2}{n} \frac{2}{n} = \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (i-1) = \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i-1)n = \frac{8}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i - 1 = \frac{8}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} = 4\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

となる。$\displaystyle\lim_{n \to \infty} S(\Delta_n) = 4 = \lim_{n \to \infty} s(\Delta_n)$ なので

$$\iint_D x dxdy = 4$$

である。

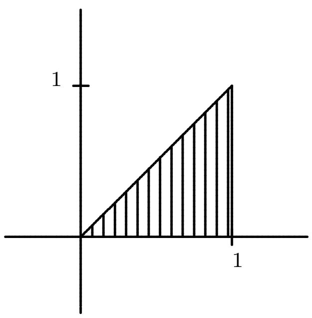
裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の重積分について考える。ただし $D = \{0 \leqq y \leqq x \leqq 1\}$ とする。

$$I = \iint_D e^{-x^2} dxdy$$

(1) 領域 D を図示せよ。
(2) D を横線形 ($\{\,(x, y) \mid c \leqq y \leqq d, h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y)\,\}$ の形) の形で表せ。
(3) 重積分 I を x を先に計算する形の累次積分で表せ (計算を実行しなくてもよい)。
(4) D を縦線形 ($\{\,(x, y) \mid a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x)\,\}$ の形) の形で表せ。
(5) 重積分 I を y を先に積分する形の累次積分で表せ (計算を実行しなくてもよい)。
(6) I を求めよ。



(1) $D_1 = \{\,(x, y) \mid 0 \leqq y\,\}$，$D_2 = \{\,(x, y) \mid y \leqq x\,\}$，$D_3 = \{\,(x, y) \mid x \leqq 1\,\}$ の 3 つの領域の共通部分が D なので図のようになる。

(2)

$$D = \{\,(x, y) \mid 0 \leqq y \leqq 1, y \leqq x \leqq 1\,\}$$

となる。

(3)

$$I = \int_0^1 \left\{ \int_y^1 e^{-x^2} dx \right\} dy$$

である。

(4)

$$D = \{\,(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq x\,\}$$

となる。

(5)

$$I = \int_0^1 \int_0^x e^{-x^2} dydx$$

である。

(6)

$$I = \int_0^1 \left\{ \int_0^x e^{-x^2} dy \right\} dx = \int_0^1 \left\{ \left[e^{-x^2} y \right]_{y=0}^{x} \right\} dx = \int_0^1 x e^{-x^2} dx$$

となる。ここで $t = -x^2$ とおくと $x : 0 \to 1$ のとき $t : 0 \to -1$ であり $\dfrac{dt}{dx} = -2x$ なので $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{2x}$ となる。よって

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{-1} x e^t \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{-1} -x e^t \frac{1}{2x} dt = -\frac{1}{2} \int_0^{-1} e^t dt \\ &= -\frac{1}{2} \left[e^t \right]_0^{-1} = \frac{1 - e^{-1}}{2} \end{aligned}$$

となる。

3 次の問に答えながら $I=\int_0^{\infty}\exp\left(-x^2\right)dx$ を求めよ。そのためにまず広義積分

$$J=\iint_D \exp\left(-x^2-y^2\right)dxdy \qquad D=\left\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;x\geqq 0, y\geqq 0\,\right\}$$

を計算する。

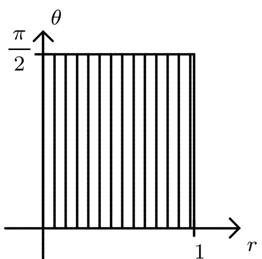
(1) $\{A_n\}$ が D の近似増加列であることの定義を述べよ。

(1) 任意の自然数 n に対し A_n は有界閉集合である。
(2) 任意の自然数 n に対し $A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq D$ が成立する。
(3) D に含まれる任意の有界閉集合 K に対し，ある n が存在して $K\subseteq A_n$ となる。

(2) 自然数 n に対し $A_n=\left\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;0\leqq x, 0\leqq y, x^2+y^2\leqq n^2\,\right\}$，$J_n=\iint_{A_n}\exp\left(-x^2-y^2\right)dxdy$ とおく。このとき J を J_n を用いて表せ。このとき極限記号 $\lim_{n\to\infty}$ を用いてよい。

$$J=\lim_{n\to\infty}J_n$$

(3) $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ と変数変換をする。このとき A_n に対応する $r\theta$–平面の領域を E_n とする。E_n を求め，図示せよ。



$x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$ なので $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ また $r=\sqrt{x^2+y^2}\leqq\sqrt{n^2}=n$ なので

$$E_n=\left\{\,(r,\theta)\;\middle|\;0\leqq r\leqq n, 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\,\right\}$$

とおく。$(r,\theta)\in E_n$ のとき対応する点 (x,y) は $(x,y)\in A_n$ であり，$(x,y)\in A_n$ に対し対応する点が (x,y) になるような (r,θ) が E_n に存在する。よってこの E_n が求めるものである。

(4) この対応で一対一でない部分を求めよ。

$r=0$ のとき θ の値によらず対応する点は $(0,0)$ になる。$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で $\sin\theta$ は一対一である。よって $r\neq 0$ のときは一対一に対応する。よって求める領域は

$$\{\,(r,\theta)\in E_n\mid r=0\,\}$$

(5) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を計算せよ (計算過程も書くこと)。

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} &= \begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}\\ &= r\cos^2\theta-\left(-r\sin^2\theta\right)=r\end{aligned}$$

(6) $J_n=\iint_{A_n}\exp\left(-x^2-y^2\right)dxdy$ を求めよ。(**問題は裏に続く**)

$$\begin{aligned}J_n &= \iint_{A_n}\exp\left(-x^2-y^2\right)dxdy=\iint_{E_n}\exp\left(-r^2\right)rdrd\theta\\ &= \int_0^n\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\exp\left(-r^2\right)d\theta\right\}dr=\frac{\pi}{2}\int_0^n r\exp\left(-r^2\right)dr\\ &= \frac{\pi}{2}\left[\,-\frac{1}{2}\exp\left(-r^2\right)\right]_{r=0}^{n}=\frac{\pi}{4}\left(1-\exp\left(-n^2\right)\right)\end{aligned}$$

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

(7) J を求めよ。

$$J = \lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty} = \frac{\pi}{4}\left(1-\exp\left(-n^2\right)\right) = \frac{\pi}{4}$$

(8) 自然数 n に対し $B_n = \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq n, 0 \leqq y \leqq n \right\}$, $K_n = \iint_{B_n} \exp\left(-x^2-y^2\right)dxdy$ とおくとき $K_n = \left\{\int_0^n \exp\left(-x^2\right)dx\right\}^2$ が成立する事を示せ。

$$\begin{aligned}
K_n &= \iint_{B_n} \exp\left(-x^2-y^2\right)dxdy = \iint_{B_n} \exp\left(-x^2\right)\exp\left(-y^2\right)dxdy = \int_0^n \left\{\int_0^n \exp\left(-x^2\right)\exp\left(-y^2\right)dy\right\}dx \\
&= \int_0^n \left\{\exp\left(-x^2\right)\int_0^n \exp\left(-y^2\right)dy\right\}dx = \int_0^n \exp\left(-y^2\right)dy \int_0^n \exp\left(-x^2\right)dx = \int_0^n \exp\left(-x^2\right)dx \int_0^n \exp\left(-x^2\right)dx \\
&= \left\{\int_0^n \exp\left(-x^2\right)dx\right\}^2
\end{aligned}$$

(9) J を K_n を用いて表せ。このとき極限記号 $\lim\limits_{n\to\infty}$ を用いてよい。

$$J = \lim_{n\to\infty} K_n$$

(10) J を I を用いて表せ。

$$J = \lim_{n\to\infty} K_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^n \exp\left(-x^2\right)dx\right\}^2 = \left\{\lim_{n\to\infty}\int_0^n \exp\left(-x^2\right)dx\right\}^2 = I^2$$

(11) I を求めよ。

$$I = \sqrt{J} = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

4 3 重積分

$$I = \iiint_D 6z\,dxdydz \qquad D = \left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 \leqq x+y \leqq x+y+z \leqq 1, 0 \leqq x \leqq 1 \right\}$$

を次に従って求めよ。

(1) 累次積分の形に直せ。

領域 D は

$$D = \{ (x,y,z) \mid 0 \leqq x \leqq 1, -x \leqq y \leqq 1-x, 0 \leqq z \leqq 1-(x+y) \}$$

と書けるので

$$I = \int_0^1 \left\{\int_{-x}^{1-x} \left\{\int_0^{1-(x+y)} 6z\,dz\right\}dy\right\}dx$$

となる。

(2) I を求めよ。

$$I = \int_0^1 \{=\}\,dx \int_0^1 \left\{\int_{-x}^{1-x} \left\{3(1-(x+y))^2\right\}dy\right\}dx = \int_0^1 1dx = 1$$