解析学 I 第 1 回試験

2010–12–9　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ を定義に基づき微分せよ。

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{h\to 0} \frac{\left((x+h)^2 + \dfrac{1}{(x+h)^2}\right) - \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(x^2 + 2xh + h^2 - x^2 + \frac{x^2}{x^2(x+h^2)} - \frac{(x+h)^2}{x^2(x+h)^2}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(2xh + h^2 - \frac{2xh+h^2}{x^2(x+h)^2}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \left(2x + h - \frac{2x+h}{x^2(x+h)^2}\right) \\
&= 2x - \frac{2}{x^3}
\end{aligned}$$

2 $y = 2^{2x}\sin\left(5x^2+4x\right)$ を微分せよ。$(a^x)' = a^x \log a$, $(\sin x)' = \cos x$ 等の諸公式を用いてよい。

$$\begin{aligned}
y' &= \left(2^{2x}\right)'\sin\left(5x^2+4x\right) + 2^{2x}\left(\sin\left(5x^2+4x\right)\right)' \\
&= 2\cdot 2^{2x}\log 2\sin\left(5x^2+4x\right) + (10x+4)2^{2x}\cos\left(5x^2+4x\right)
\end{aligned}$$

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{3}$ 関数 $y=f(x)=\sin x$ とするとき次の問に答えよ。

(1) $x=a+h,\ \varepsilon(h)=\dfrac{f(a+h)-(A+Bh)}{h}$ とおく。$\displaystyle\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ が成立するとき $A+Bh$ を $x=a$ で $y=f(x)=f(a+h)$ を一番よく近似する 1 次式という。$x=\dfrac{\pi}{4}$ で $y=f(x)=f(a+h)$ を一番よく近似する 1 次式を求めよ。

$\displaystyle\lim_{h\to 0}h\varepsilon(h)=0$ より $\displaystyle\lim_{h\to 0}h\varepsilon(h)=\lim_{h\to 0}\Big(f(\frac{\pi}{4}+h)-(A+Bh)\Big)=f(\frac{\pi}{4})-A=0$。よって $A=f(\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(\frac{\pi}{4}+h)-(A+Bh)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}-Bh}{h} && \text{(ここでロピタルの定理を使用)}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-B}{1}=\cos\frac{\pi}{4}-B=\frac{1}{\sqrt{2}}-B\end{aligned}$$

となるが，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ より $B=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。よって求める 1 次式は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}h$ である。

(2) $x=a+h,\ \varepsilon(h)=\dfrac{f(a+h)-(A+Bh+Ch^2)}{h^2}$ とおく。$\displaystyle\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ が成立するとき $A+Bh+Ch^2$ を $x=a$ で $y=f(x)=f(a+h)$ を一番よく近似する 2 次式という。$x=\dfrac{\pi}{4}$ で $y=f(x)=f(a+h)$ を一番よく近似する 2 次式を求めよ。

$\displaystyle\lim_{h\to 0}h^2\varepsilon(h)=0$ より $\displaystyle\lim_{h\to 0}h^2\varepsilon(h)=\lim_{h\to 0}\Big(f(\frac{\pi}{4}+h)-(A+Bh+Ch^2)\Big)=f(\frac{\pi}{4})-A=0$。よって $A=f(\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}h\varepsilon(h)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(\frac{\pi}{4}+h)-(A+Bh+Ch^2)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}-Bh-Ch^2}{h} && \text{(ここでロピタルの定理を使用)}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(h+\frac{\pi}{4}\right)-B-2Ch}{1}=\cos\frac{\pi}{4}-B=\frac{1}{\sqrt{2}}-B\end{aligned}$$

となるが，$\displaystyle\lim_{h\to 0}h\varepsilon(h)=0$ より $B=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(\frac{\pi}{4}+h)-\left(A+Bh+Ch^2\right)}{h^2}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}h-Ch^2}{h^2} && \text{(ここでロピタルの定理を使用)}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}-2Ch}{2h} && \text{(ここで再びロピタルの定理を使用)}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-2C}{2}=-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}-C=-\frac{1}{2\sqrt{2}}-C\end{aligned}$$

となるが，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ より $C=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ である。よって求める 2 次式は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}h-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}h^2$ である。

$\boxed{\mathbf{4}}$ $y=f(x)=\log(x+1)$ を $x=1$ でテーラー展開することを考える。次の問いに答えながら，テーラー展開を求めよ。

(1) $f'(x)$ および $f''(x)$，$f^{(3)}(x)$ を求めよ。

$f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)}$，$f''(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$，$f'''(x)=\dfrac{2}{(x+1)^3}$ である。

(2) 自然数 n に対し $f^{(n)}(x)$ を予想し，それが正しいことを数学的帰納法で証明せよ。

$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{(x+1)^n}$ と予想される。

$f^{(1)}(x)=f'(x)=\dfrac{1}{x+1}=(-1)^{1+1}\dfrac{(1-1)!}{(x+1)^1}$ となるので $n=1$ のとき成立している。

$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち $f^{(k)}(x)=(-1)^{k+1}\dfrac{(k-1)!}{(x+1)^k}$ を仮定する。この両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= \left((-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{(x+1)^k}\right)' \\
&= (-1)^{k+1}\frac{(k-1)!(-k)}{(x+1)^{k+1}} \\
&= (-1)^{(k+1)+1}\frac{(k+1-1)!}{(x+1)^{k+1}}
\end{aligned}$$

となるので $k+1$ のときも成立している。

(3) $y=f(x)=\log(x+1)$ を $x=1$ でテーラー展開せよ。

$f(1)=\log 2$ であり，$n\geqq 1$ のとき，$f^{(n)}(1)=(-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{2^n}$ なので

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(1)(x-1)^n \\
&= f(1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(1)(x-1)^n \\
&= \log 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left((-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{2^n}\right)(x-1)^n \\
&= \log 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n2^n}(x-1)^n
\end{aligned}$$

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の様にパラメータ表示された曲線の概形を書け。

$$x = x(t) = t^4 - t^2 + 1, \qquad y = y(t) = t^3 - t$$

$x'(t) = 4t^3 - 2t = 2t(2t^2 - 1) = 0$ より $t = -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。$y'(t) = 3t^2 - 1 = 0$ より $t = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ となる。増減表を書くと

t		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$x'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x(t)$	$\leftarrow$	$\frac{3}{4}$	$\rightarrow$	$\frac{7}{9}$	$\rightarrow$	1	$\leftarrow$	$\frac{7}{9}$	$\leftarrow$	$\frac{3}{4}$	$\rightarrow$
$y'(t)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$y(t)$	$\uparrow$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\uparrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\downarrow$	0	$\downarrow$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\uparrow$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\uparrow$
曲線	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$

となる。x 軸との交わりは $y(t) = 0$ を解いて $t = -1, 0, 1$ のときである。交点はいずれも $(1, 0)$ である。y 軸との交わりは $x(t) = 0$ を解いて，実数解が存在しないので，y 軸とは交わらない。

これを元に曲線を描くと次図のようになる。