解析学 I 第 2 回試験

2011–1–28　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 次の問いに答えよ。

(1) $z = f(x, y) = x^2y^4$ とする。定義に基づき $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を求めよ。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2y^4 - x^2y^4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2)y^4 - x^2y^4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2xh + h^2)y^4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left((2x + h)y^4\right) \\
&= 2xy^4
\end{aligned}$$

(2) $z = f(x, y) = e^{xy}\log(x^2 + y^2)$ に対し $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を求めよ。微分の諸公式を使用してよい。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \left(e^{xy}\log(x^2 + y^2)\right)_x \\
&= (e^{xy})_x \log(x^2 + y^2) + e^{xy}\left(\log(x^2 + y^2)\right)_x \\
&= ye^{xy}\log(x^2 + y^2) + e^{xy}\frac{2x}{x^2 + y^2}
\end{aligned}$$

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ $z = f(x,y) = (x-1)^3(y+1)^3$ とする。$f(a+h,b+k)$ を (a,b) で一番よく近似する n 次式 $g(h,k)$ とは，$g(h,k)$ が h,k に関する n 次式で，$\varepsilon(h,k) = \dfrac{f(a+h,b+k)-g(h,k)}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^n}$ とおくとき $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$ が成立するときをいう。次の問に答えよ。このとき「$\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} D^j f(a,b)$ が (a,b) で $f(a+h,b+k)$ を最もよく近似する n 次式である」という定理を用いてもよいが，用いずに出来るものは用いずに解答すること。

(1) $f(h,k)$ を $(0,0)$ で最もよく近似する 1 次式を求めよ。

$g(h,k) = A + Bh + Ck$ とし，$d(h,k) = f(h,k) - g(h,k)$ とおくと，$d(h,k)$ は h と k の多項式である。

p,q を 0 以上の整数とする。$\dfrac{h^p k^q}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^n}$ の極限を計算するために $h = r\cos\theta, k = r\sin\theta$ とおくと

$$\frac{h^p k^q}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^n} = \frac{r^p \cos^p \theta r^q \sin^q \theta}{\left(\sqrt{r^2 cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta}\right)^n} = \frac{r^{p+q} \cos^p \theta \sin^q \theta}{r^n}$$

となる。よって，$p+q > n$ のとき $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^p k^q}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^n} = 0$ となり，$p+q = n$ および $p+q < n$ のとき収束しない。よって $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{d(h,k)}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^n}$ が収束するためには $d(h,k)$ の $p+q \leqq n$ である $h^p k^q$ の係数が 0 であることが必要十分である。

$$\begin{aligned} d(h,k) &= (h-1)^3(k+1)^3 - (A+Bh+Ck) = (h^3-3h^2+3h-1)(k^3+3k^2+3k+1) - (A+Bh+Ck) \\ &= (h^3-3h^2)(k^3+3k^2) + (h^3-3h^2)(3k+1) + (3h-1)(k^3+3k^2) + 9hk + (3-B)h - (3+C)k - (1+A) \end{aligned}$$

よって $A = -1, B = 3, C = -3$ であり，求める 1 次式は

$$g(h,k) = -1 + 3h - 3k$$

である。

(2) $f(h,k)$ を $(0,0)$ で最もよく近似する 2 次式を求めよ。

$g(h,k) = A + Bh + Ck + Dh^2 + Ehk + Fk^2$ とおき，$d(h,k) = f(h,k) - g(h,k)$ とおく。(1) で述べたことは $n = 2$ のときも成立するので，$d(h,k)$ の 2 次以下の係数は 0 である。

$$\begin{aligned} d(h,k) =& (h-1)^3(k+1)^3 - (A+Bh+Ck+Dh^2+Ehk+Fk^2) \\ =& (h^3-3h^2)(k^3+3k^2) + (h^3-3h^2)3k + 3h(k^3+3k^2) \\ &+ h^3 - k^3 - (3+D)h^2 - (3+F)k^2 + (9-E)hk + (3-B)h - (3+C)k - (1+A) \end{aligned}$$

よって，$A = -1, B = 3, C = -3, D = -3, E = 9, F = -3$ であり，求める 2 次式は

$$g(h,k) = -1 + 3h - 3k - 3h^2 + 9hk - 3k^2$$

である。

$\boxed{\mathbf{3}}$ $z=x^3+y^3, s=x+y, t=xy$ について次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{D(s,t)}{D(x,y)}$ を求めよ。

$$\frac{D(s,t)}{D(x,y)}=\begin{pmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$$

(2) $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ を求めよ。

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)}=\left(\frac{D(s,t)}{D(x,y)}\right)^{-1}=\begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{pmatrix}=\frac{1}{x-y}\begin{pmatrix} x & -1 \\ -y & 1 \end{pmatrix}$$

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ を求めよ。

(2) より $x_s=\dfrac{x}{x-y}, y_s=\dfrac{-y}{x-y}$ となるので

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s}&=z_x x_s+z_y y_s=3x^2\frac{x}{x-y}-3y^2\frac{y}{x-y}\\&=3(x^2+xy+y^2)\end{aligned}$$

(4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}$ を求めよ。

$(z_s)_x=3(2x+y), (z_s)_y=3(x+2y)$ なので

$$\begin{aligned}z_{ss}&=(z_s)_s=(z_s)_x x_s+(z_s)_y y_s\\&=3(2x+y)\frac{x}{x-y}-3(x+2y)\frac{y}{x-y}\\&=6(x+y)\end{aligned}$$

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{4}}$ $z = f(x,y) = x^3 + 2xy^2 - 3x^2 - 3y^2 - 1$ について次の問いに答えよ。

(1) $z = f(x,y)$ の臨界点 ($\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ かつ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ となる点) を求めよ。

臨界点は $z_x = 0$ かつ $z_y = 0$ となる点 (x,y) である。$z_x = 3x^2 + 2y^2 - 6x, z_y = 4xy - 6y$ なので $z_y = 4xy - 6y = 2y(2x-3) = 0$ より $y = 0$ または $x = \dfrac{3}{2}$ を得る。

$y = 0$ のとき $z_x = 3x^2 + 2y^2 - 6x = 0$ に代入すると，$x(x-2) = 0$ となるので，この場合解は $(x,y) = (0,0),(2,0)$ である。
$x = \dfrac{3}{2}$ のとき $z_x = 3x^2 + 2y^2 - 6x = 0$ に代入すると，$2y^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$ となるので，この場合解は $(x,y) = \left(\dfrac{3}{2}, \pm\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\right)$ である。よって臨界点は

$$(x,y) = (0,0),(2,0),\left(\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$$

である。

(2) $z = f(x,y)$ の極値を与える点を求めよ。

$$z_{xx} = 6x - 6, \quad z_{xy} = 4y, \quad z_{yy} = 4x - 6$$

なのでヘッシャン $H(x,y)$ は

$$H(x,y) = 12(x-1)(2x-3) - 16y^2$$

となる。臨界点を代入すると

$$H(0,0) = 36 > 0, H(2,0) = 12 > 0, H\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -18 < 0, H\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -18 < 0$$

となる。よって極値を与える (x,y) は $(0,0)$ と $(2,0)$ である。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (15)。