解析学 I 第 3 回試験

2011–2–17　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 次の問に答えよ。

(1) $y = f(x) = \dfrac{3x^3 + x^2 + 3}{(x-1)^2(x^2+2x+4)}$ を部分分数展開せよ。

$f(x) = \dfrac{Ax+B}{(x-1)^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+2x+4}$ とおくと，恒等的に $3x^3 + x^2 + 3 = (Ax+B)(x^2+2x+4) + (Cx+D)(x-1)^2$ が成立している。

$x = 1$ を代入すると $A + B = 1$ を得る。両辺を x で微分して $x = 1$ を代入すると $11 = 7A + 4(A+B)$ を得る。よって $A = 1, B = 0$ である。このとき

$$(Cx+D)(x-1)^2 = 3x^3 + x^2 + 3 - x(x^2+2x+4) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3 = (2x+3)(x-1)^2$$

より $C = 2, D = 3$ を得る。以上により

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)^2} + \frac{2x+3}{x^2+2x+4}$$

を得る。

(2) $I = \displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ。$\displaystyle\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan t$ を使用してもよい。

$$I_1 = \int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx = \int \left(\frac{x-1+1}{(x-1)^2}\right)dx = \int \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \log|x-1| - \frac{1}{x-1}$$

であり,

$$I_2 = \int \frac{2x+3}{x^2+2x+4}\,dx = \int \left(\frac{(x^2+2x+4)'+1}{x^2+2x+4}\right)dx = \int \frac{(x^2+2x+4)'}{x^2+2x+4} + \frac{1}{x^2+2x+4}\,dx$$

となる。前者は $u = x^2+2x+4$ と置いて置換積分をすればよい。後者は $x^2+2x+4 = (x^2+2x+1)+3 = (x+1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2$ となるので $x+1 = \sqrt{3}\tan t$ とおくと

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{1}{x^2+2x+4}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\,dx = \int \frac{1}{3\tan^2 t + 3}\sqrt{3}\left(1+\tan^2 t\right)\,dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

となる。よって

$$I = \log|x-1| - \frac{1}{x-1} + \log(x^2+2x+4) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}}$$

である。

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ 不定積分

$$I = \int \frac{1}{\cos x}\, dx$$

を次にしたがって求めよ。$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ とおく。

(1) $\cos x = \cos 2\left(\frac{x}{2}\right)$ と考えることにより，$\cos x$ を t を用いて表せ。途中で $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1$ を使用するかもしれない。

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos 2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}
\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{dt}{dx}$ を t を用いて表せ。

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{dx} &= \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\right)' = \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)' \frac{1}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)' \frac{-1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + t^2\right)
\end{aligned}$$

(3) 不定積分 $I = \displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\, dx$ を変数変換して t に関する不定積分の形に直せ。

$$I = \int \frac{1}{\cos x}\, dx = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\,\frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{2}{1-t^2}\, dt$$

(4) 不定積分 I を求めよ。

計算を実行すると

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{2}{1-t^2}\, dt = \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt = \log|1+t| - \log|1-t| \\
&= \log\left|1 + \tan\frac{x}{2}\right| - \log\left|1 - \tan\frac{x}{2}\right|
\end{aligned}$$

が得られる。

3 空気中を落下する物体に働く空気の抵抗力は速度の 2 乗に比例する。比例定数を k, 重力定数を g，物体の質量を m とする。速度を v とするとき，運動方程式 $F = ma$ (F は物体に働く力，a は加速度) を用いて，v の満たす微分方程式を求めよ。時間変数は t とする。

下向きを正の方向とすると，働く力は $mg - kv^2$ なので

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$

となる。

4 微分方程式

$$y'' + 4y' + 7y = 0 \qquad (*)$$

について次の問に答えよ。

(1) 微分方程式 $(*)$ を複素数値関数の範囲で解け。

微分方程式は演算子を用いて $(D^2 + 4D + 7)y = 0$ と書ける。$t^2 + 4t + 7 = 0$ の解を $\alpha = -2 + \sqrt{3}i, \beta = -2 - \sqrt{3}i$ とおくと，$D^2 + 4D + 7 = (D - \alpha)(D - \beta)$ と書ける。微分方程式は $(D - \alpha)(D - \beta)y = 0$ となる。$u = (D - \beta)y$ とおくと $(D - \alpha)u = 0$ となる。

ここで $D - \alpha = e^{\alpha x} D e^{-\alpha x}$ が成立しているので $e^{\alpha x} D e^{-\alpha x} u = 0$ を得る。両辺に $e^{-\alpha x}$ をかけることにより $De^{-\alpha x}u = 0$ となる。$e^{-\alpha x}u = \int 0\,dx$ は定数なので C_1 とおくと $u = C_1 e^{\alpha x}$ となる。よって

$$(D - \beta)y = u = C_1 e^{\alpha x}$$

を解けばよい。$D - \beta = e^{\beta x} D e^{-\beta x}$ より

$$e^{\beta x} D e^{-\beta x} y = C_1 e^{\alpha x}$$

を得る。両辺に $e^{-\beta x}$ をかけると $De^{-\beta x}y = C_1 e^{(\alpha-\beta)x}$ となるので

$$e^{-\beta x} y = \int C_1 e^{(\alpha-\beta)x}\,dx = \frac{C_1}{\alpha - \beta} e^{(\alpha-\beta)x} + C_2$$

$$y = \frac{C_1}{\alpha - \beta} e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

となる。$\dfrac{C_1}{\alpha - \beta}$ をあらためて C_1 とおくと一般解

$$y = C_1 e^{(-2+\sqrt{3}i)x} + C_2 e^{(-2-\sqrt{3}i)x}$$

が得られる。

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

(2)　(1) で求めた解関数が実際微分方程式 $(*)$ を満たすことをチェックせよ。

$$
\begin{aligned}
y' &= C_1(-2+\sqrt{3}i)e^{(-2+\sqrt{3}i)x} + C_2(-2-\sqrt{3}i)e^{(-2-\sqrt{3}i)x} \\
y'' &= C_1(-2+\sqrt{3}i)^2 e^{(-2+\sqrt{3}i)x} + C_2(-2-\sqrt{3}i)^2 e^{(-2-\sqrt{3}i)x}
\end{aligned}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
y''+4y'+7y =& C_1\left((-2+\sqrt{3}i)^2+4(-2+\sqrt{3}i)+7\right)e^{(-2+\sqrt{3}i)x} \\
&+ C_2\left((-2-\sqrt{3}i)^2+4(-2-\sqrt{3}i)+7\right)e^{(-2-\sqrt{3}i)x} = 0
\end{aligned}
$$

である。

(3)　微分方程式 $(*)$ の実数値関数としての一般解を求めよ。一般解であることの証明もすること。

　オイラーの公式「$e^{ix}=\cos x + i\sin x$」を用いると複素数値関数としての一般解は

$$
\begin{aligned}
y &= C_1 e^{(-2+\sqrt{3}i)x} + C_2 e^{(-2-\sqrt{3}i)x} = C_1 e^{-2x} e^{i\sqrt{3}x} + C_2 e^{-2x} e^{-i\sqrt{3}x} \\
&= C_1 e^{-2x}\left(\cos\sqrt{3}x + i\sin\sqrt{3}x\right) + C_2 e^{-2x}\left(\cos(-\sqrt{3}x) + i\sin(-\sqrt{3}x)\right) \\
&= C_1 e^{-2x}\left(\cos\sqrt{3}x + i\sin\sqrt{3}x\right) + C_2 e^{-2x}\left(\cos\sqrt{3}x - i\sin\sqrt{3}x\right)
\end{aligned}
$$

となる。$C_1 = C_2 = \dfrac{1}{2}$ とおくと実数値関数である特殊解 $y_1 = e^{-2x}\cos\sqrt{3}x$ が得られる。$C_1 = -C_2 = \dfrac{1}{2i}$ とおくと実数値関数である特殊解 $y_2 = e^{-2x}\sin\sqrt{3}x$ が得られる。よって一般解は

$$
y = C_1 e^{-2x}\cos\sqrt{3}x + C_2 e^{-2x}\sin\sqrt{3}x
$$

と予想される。

　$A = \{\, y \mid y''+4y'+7y=0 \,\}$, $B = \left\{ y = C_1 e^{-2x}\cos\sqrt{3}x + C_2 e^{-2x}\sin\sqrt{3}x \,\middle|\, C_1, C_2 \text{は定数} \right\}$ とおくとき $A=B$ を示せば一般解であることが分かる。そのためには (a) $B \subseteq A$ および，(b) $A \subseteq B$ を示せばよい。$\forall y \in B$ とすると $y = C_1 e^{-2x}\cos\sqrt{3}x + C_2 e^{-2x}\sin\sqrt{3}x$ と書けている。このとき前問 (2) より

$$
y''+4y'+7y = 0
$$

が成立している。よって $y \in A$ であり，(a) が示された。

　$\forall y \in A$ とする。ここで予備的計算をする。y が B にはいっているとき，即ち $y = y(x) = C_1 e^{-2x}\cos\sqrt{3}x + C_2 e^{-2x}\sin\sqrt{3}x$ となっているとする。このとき $x=0$ を代入すると，$y(0) = C_1$ となる。y を x で微分すると $y' = (-2C_1+\sqrt{3}C_2)e^{-2x}\cos\sqrt{3}x + (-\sqrt{3}C_1 - 2C_2)e^{-2x}\sin\sqrt{3}x$ となるので $x=0$ を代入すると $y'(0) = -2C_1 + \sqrt{3}C_2$ となり，$C_2 = \dfrac{y'(0)+2y(0)}{\sqrt{3}}$ となる。

　$z = y(0)e^{-2x}\cos\sqrt{3}x + \dfrac{y'(0)+2y(0)}{\sqrt{3}}e^{-2x}\sin\sqrt{3}x$ とおくと $z \in B$ である。また

$$
z' = -2y(0)e^{-2x}\cos\sqrt{3}x - \sqrt{3}y(0)e^{-2x}\sin\sqrt{3}x + \frac{y'(0)+2y(0)}{\sqrt{3}}e^{x}\sin\sqrt{3}x + \sqrt{3}\frac{y'(0)+2y(0)}{\sqrt{3}}e^{x}\cos\sqrt{3}x
$$

より $z(0) = y(0)$，$z'(0) = y'(0)$ となる。y および z は微分方程式 $y''-2y'+5y=0$ の解であり，$y(0)=z(0)$ かつ $y'(0)=z'(0)$ となるので，微分方程式の解の一意性より $y=z$ となる。よって $y = z \in B$ となり (b) が示される。