解析学 II 第 1 回試験

2010–6–7　　河野

注意: ・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 次の問に答えよ。

(1) 1 変数関数 $y = f(x)$ の不定積分の定義を述べよ。

(2) 1 変数関数 $y = f(x)$ の区間 $[a, b]$ における定積分の定義を述べよ。

(3) $\displaystyle\int_1^3 x^3\,dx$ は積分可能か。不可能な場合はその事を示し。可能な場合は定義に基づいて積分を計算せよ。ただし $\displaystyle\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ を用いてよい。

(1) $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$ となる関数 $F(x)$ が存在するとき $F(x)$ を $f(x)$ の不定積分といい $F(x)$ を

$$\int f(x)\,dx$$

と表す。

(2) $\Delta = \{\, x_0, x_1, \ldots, x_n \,\}$ が $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ を満たすとき $[\,a,\,b\,]$ の分割という。$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (i=1,. . . ,n) とし，$|\Delta| = \max\{\, \Delta x_i \mid i = 1, \ldots, n \,\}$ を分割の最大幅という。分割 Δ に対し

$$M_i = \sup\{\, f(x) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i \,\}, \qquad m_i = \inf\{\, f(x) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i \,\}$$

とおき,

$$S(\Delta) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \qquad s(\Delta) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

とおく。$\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0} S(\Delta) = \lim_{|\Delta|\to 0} s(\Delta)$ となるとき $f(x)$ は $[\,a,\,b\,]$ で積分可能といい，上の極限値を

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

と書く。

(3) $\Delta_n = \{\, x_0, x_1, \ldots, x_n \,\}$ を $[\,1,\,3\,]$ の n 等分割とする。$x_0 = 1$ であり，区間幅が $\dfrac{2}{n}$ なので $x_i = 1 + \dfrac{2i}{n}$ となる。また $\Delta x_i = \dfrac{2}{n}$ である。$y = x^3$ は $[\,1,\,3\,]$ で単調増加なので $M_i = x_i^3, m_i = x_{i-1}^3$ である。よって

$$\begin{aligned}
S(\Delta_n) &= \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^3 \frac{2}{n} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + 3\frac{2i}{n} + 3\left(\frac{2i}{n}\right)^2 + \left(\frac{2i}{n}\right)^3\right) \\
&= \frac{2}{n}\left(n + \frac{6}{n}\,\frac{n(n+1)}{2} + \frac{12}{n^2}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{8}{n^3}\,\frac{n^2(n+1)^2}{2^2}\right) \\
&= 2 + 6\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 4\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) + 4\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \\
s(\Delta_n) &= \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{2(i-1)}{n}\right)^3 \frac{2}{n} = 2 + 6\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 4\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right) + 4\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2
\end{aligned}$$

であり $\displaystyle\lim_{|\Delta_n|\to 0} S(\Delta_n) = 20 = \lim_{|\Delta_n|\to 0} s(\Delta_n)$ より

$$\int_1^3 x^3\,dx = 20$$

である。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の広義積分は収束するか。収束しないときはそのことを示し，収束するときは計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2-1}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

(1) $\dfrac{1}{x^2-1}$ は $x=1$ で不連続なので，広義積分は

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2-1}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2-1}\,dx$$

としたとき，それぞれの広義積分が収束すればよい。$\varepsilon > 0$ に対し $I(\varepsilon) = \displaystyle\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{x^2-1}\,dx$ とおくと $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{2(x-1)} - \dfrac{1}{2(x+1)}$ なので

$$\begin{aligned} I(\varepsilon) &= \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{2(x-1)}\,dx - \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{2(x+1)}\,dx = \left[\frac{1}{2}\log|x-1|\right]_0^{1-\varepsilon} - \left[\frac{1}{2}\log|x+1|\right]_0^{1-\varepsilon} \\ &= \frac{1}{2}\left(\log|\varepsilon| - \log|1| - \log|2-\varepsilon| + \log|1|\right) = \frac{1}{2}\left(\log|\varepsilon| - \log|2-\varepsilon|\right) \end{aligned}$$

となるが，$\log|2-\varepsilon| \to \log 2$，$\log|\varepsilon| \to \infty$ なので収束しない。よって求める広義積分は収束しない。

(2) $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$ なので $M>1$ となる実数 M に対し $I(M) = \displaystyle\int_1^M \frac{1}{x(x+1)}\,dx$ とおくと

$$\begin{aligned} I(M) &= \int_1^M \left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right\} dx = \Big[\log x\Big]_1^M - \Big[\log(x+1)\Big]_1^M \\ &= \log M - \log 1 - \log(M+1) + \log 2 = \log\frac{M}{M+1} + \log 2 \end{aligned}$$

であり

$$\lim_{M\to\infty} \log\frac{M}{M+1} = \lim_{M\to\infty} \log\frac{1}{1+\dfrac{1}{M}} = \log = 1 = 0$$

となるので，広義積分は収束し

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \log 2$$

となる。

$\boxed{\mathbf{3}}$ $x = x(t) = 3t - t^3, y = y(t) = 2t^2 - t^4$ でパラメータ表示された曲線について次の問に答えよ。

(1) この曲線の概形を書け。

(2) この曲線によって囲まれる部分のうち第 1 象限にある部分の面積を求めよ。

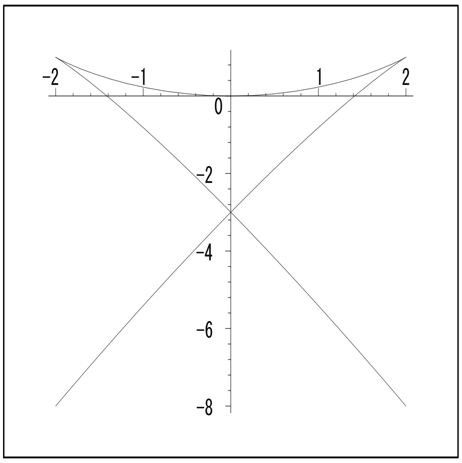
問題を間違ったためとがった (特異点のある) 図形を出してしまいました。とがっている所は正確に描けなくても OK としました。正確に描きたい人は演習問題 1.14 の解説を参考にして下さい。

(1) $x'(t) = 3 - 3t^2$ より $t = \pm 1$ において $x'(t) = 0$ となる。$y'(t) = 4t - 4t^3$ より $t = 0, \pm 1$ において $y'(t) = 0$ となる。このとき導関数の 0 になる点は $(x(-1), y(-1)) = (-2, 1)$, $(x(0), y(0)) = (0, 0)$, $(x(1), y(1)) = (2, 1)$ となっている。

よって増減表は以下の様になる。

t		-1		0		1	
x'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\uparrow$		$\uparrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	
曲線	$\nwarrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\swarrow$

$x(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm\sqrt{3}$ となるので $t = 0, \pm\sqrt{3}$ のとき，曲線は y 軸と交わる。$y(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm\sqrt{2}$ となるので $t = 0, \pm\sqrt{2}$ のとき，曲線は x 軸と交わる。このことに注意して概形を描くと次の様になる。



(2) t が 0 から $\sqrt{2}$ まで変化するとき点は第 1 象限を動く。よって求める面積を S とすると，向きを考慮すると

$$S = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{0} x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\,dt \quad = \quad = \frac{8\sqrt{2}}{35}$$

である。

裏にも問題有り

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{4}}$ 一様な密度の材質でできている高さ h の円錐の重心は底面からどれくらいの所にあるか。

円錐の底面の半径を r とする。円錐を，円錐の頂点が原点にあり，底面が y–z 平面に平行で x 軸の正の部分に来るようにおく。円錐と平面 $x=t$ の共通部分の面積は $\dfrac{\pi r^2}{h^2}t^2$ なので前問と同様に考えると，線密度 $\mu(x)=\dfrac{\pi r^2}{h^2}x^2$ の銅線が $0 \leqq x \leqq h$ にあり，その重心が円錐の重心の位置を与えると考えてよい。質量を K とすると，

$$K = \int_0^h \mu(x)\,dx = \int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2}x^2\,dx = \left[\frac{\pi r^2}{3h^2}x^3\right]_0^h = \frac{\pi}{3}r^2h$$

となる。またモーメント M は

$$M = \int_0^h x\mu(x)\,dx = \int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2}x^3\,dx = \left[\frac{\pi r^2}{4h^2}x^4\right]_0^h = \frac{\pi}{4}r^2h^2$$

となる。よって重心の位置を X_G とすると，$X_G M = K$ なので $X_G = \dfrac{3}{4}h$ となる。底面は $x=h$ にあるので，重心は高さの $\dfrac{1}{4}$ の所にある事が分かる。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (10)。