# 解析学II第2回試験

2010–8–5　　河野

注意:　・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

$\boxed{1}$ (1) 領域 $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d \right\}$ を長方形領域とする。連続な関数 $f(x, y)$ の $D$ における重積分 $\displaystyle\iint_D f(x, y)dxdy$ の定義を述べよ。可能なものは連続な関数ではなく有界な関数に対する定義を述べよ (どちらの関数に関しての定義か明記すること)。

**有界な関数に対する定義を述べる。**：$\Delta = \{ x_0, x_1, \ldots, x_m\ ;\ y_0, y_1, \ldots, y_n \}$ を長方形領域 $D$ の分割とする。即ち $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b$，$c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = d$ が成立しているとする。$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ とする。分割の最大幅 $|\Delta|$ を $|\Delta| = \max \{ \Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m, \Delta y_1, \ldots, \Delta y_n \}$ とおく。$M_{ij} = \sup \{ f(x, y) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j \}$，$m_{ij} = \inf \{ f(x, y) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j \}$ とする。ただし $\sup, \inf$ はそれぞれ上限，下限とする。$S(\Delta) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j$，$s(\Delta) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j$ とする。分割を細かくした極限を考える。即ち $|\Delta| \to 0$ を考える。$\displaystyle\lim_{|\Delta| \to 0} S(\Delta) = \lim_{|\Delta| \to 0} s(\Delta)$ が成立するとき $f(x, y)$ は $D$ で積分可能であるといい，この極限値を $\displaystyle\iint_D f(x, y)dxdy$ と表す。

(2) $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq 2, 1 \leqq y \leqq 3 \right\}$ とする。重積分

$$\iint_D -x dxdy$$

を定義に基づき計算せよ。

$D$ の $n$ 等分割 $\Delta_n = \{ x_0, \ldots, x_n; y_0, \ldots, y_n \}$ を考える。即ち $x_i = \dfrac{2i}{n}$，$y_j = 1 + \dfrac{2j}{n}$ とする。このとき $\Delta x_i = \dfrac{2}{n}$，$\Delta y_j = \dfrac{2}{n}$ である。$|\Delta_n| = \dfrac{2}{n}$ なので $|\Delta_n| \to 0$ と $n \to \infty$ は同じである。$f(x, y) = -x$ とおくと $f(x, y)$ は $D$ で $x$ に関し単調減少である。よって $M_{ij} = f(x_{i-1}, y) = -x_{i-1} = -\dfrac{2(i-1)}{n}$，$m_{ij} = f(x_i, y) = -x_i = -\dfrac{2i}{n}$ なので

$$S(\Delta_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} -\frac{2(i-1)}{n}\frac{2}{n}\frac{2}{n} = -\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i-1) = -\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)n = -\frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i - 1 = -\frac{8}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} = -4\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$s(\Delta_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} -\frac{2i}{n}\frac{2}{n}\frac{2}{n} = -\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i = -\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} in = -\frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = -\frac{8}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = -4\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

となる。$\displaystyle\lim_{n \to \infty} S(\Delta_n) = -4 = \lim_{n \to \infty} s(\Delta_n)$ なので

$$\iint_D -x dxdy = -4$$

である。

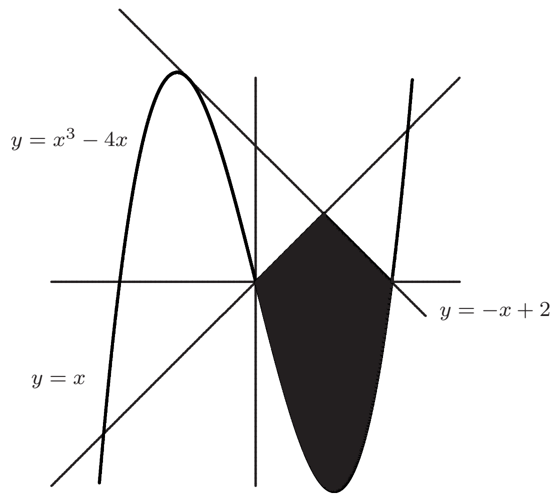
裏にも問題あり。別紙にも問題あり

| 学科 | | 在番籍号 | | 氏名 | |
|---|---|---|---|---|---|

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の重積分について考える。ただし $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geqq x^3 - 4x, y \leqq x, y \leqq -x + 2 \right\}$ とする。

$$I = \iint_D x dx dy$$

(1) 領域 $D$ を図示せよ。




(2) $D$ を縦線形 ($\{ (x, y) \mid a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x) \}$ の形) の形で表すために $D$ を 2 つの領域 $D_1$ と $D_2$ に分ける。このとき $D_1$ および $D_2$ それぞれを縦線形で表せ。

$D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leqq x \leqq 1, x^3 - 4x \leqq y \leqq x \right\}$，$D_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leqq x \leqq 2, x^3 - 4x \leqq y \leqq -x + 2 \right\}$ とおくと，

$$D = D_1 + D_2$$

となっている。

(3) $I$ を求めよ。

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D x dx dy = \iint_{D_1} x dx dy + \iint_{D_2} x dx dy \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_{x^3-4x}^{x} x \, dy \right\} dx + \int_1^2 \left\{ \int_{x^3-4x}^{-x+2} x \, dy \right\} dx \\
&= \int_0^1 x(5x - x^3) \, dx + \int_1^2 x(2 + 3x - x^3) \, dx \\
&= \frac{22}{15} + \frac{19}{5} = \frac{79}{15}
\end{aligned}$$

**3** 次に従って 積分

$$J = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy$$

を計算せよ。ただし，$a, b$ は正の定数で

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1, y \geqq 0 \right\}$$

である。

(1) $x = ar\cos\theta, y = br\sin\theta$ と置き，$(x, y)$ から $(r, \theta)$ へ変数変換を行う。このときヤコビアン $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ。

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr$$

(2) $D$ に対応する $r\theta$–平面の領域 $E$ を $E = \left\{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r \text{ と} \theta \text{の式たち} \right\}$ の形で表せ。

$1 \geqq \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{a^2r^2\cos^2\theta}{a^2} + \dfrac{b^2r^2\sin^2\theta}{b^2} = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$ であり，$y \geqq 0$ のとき $(x, y)$ に対応する $(r, \theta)$ は $0 \leqq \theta \leqq \pi$ なので

$$E = \left\{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta\pi \right\}$$

となる。

(3) $J$ を $r$ と $\theta$ の重積分の形で表せ。

$$J = \iint_E \left(a^2r^2\cos^2\theta + b^2r^2\sin^2\theta\right) abr\, drd\theta$$

(4) $J$ を求めよ。

$$\begin{aligned} J &= \iint_E \left(a^2r^2\cos^2\theta + b^2r^2\sin^2\theta\right) abr\, drd\theta \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^\pi abr^3 \left(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta\right) d\theta \right) dr \\ &= ab\int_0^1 r^3\, dr \int_0^\pi \left(a^2r^2\cos^2\theta + b^2r^2\sin^2\theta\right) d\theta \\ &= ab\frac{1}{4}\frac{(a^2 + b^2)\pi}{2} = \frac{ab(a^2 + b^2)\pi}{8} \end{aligned}$$

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 学科 | | 在籍番号 | | 氏名 | |

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次に従って 3 重積分

$$J = \iiint_D z dx dy dz$$

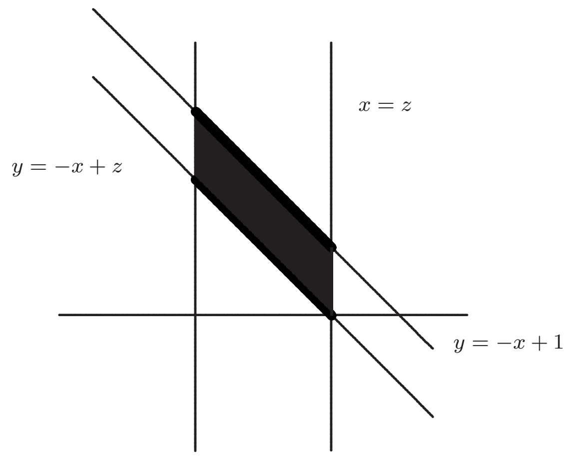
を計算せよ。ただし

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 \leqq z \leqq x + y \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq z \right\}$$

(1) $(x, y, z)$ が $D$ の点であるとき $z$ はどの範囲にあるかを求めよ。

$0 \leqq z \leqq 1$ の範囲にである。

(2) $z$ を固定したとき $D$ と $z$ 座標が $z$ である平面との共通部分の図形を $xy$–平面に図示せよ。




(3) $D$ を $\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, a \leqq z \leqq b, g_1(z) \leqq x \leqq g_2(z), h_1(x, z) \leqq y \leqq h_2(x, z) \right\}$ の形で表せ。

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq z, -x + z \leqq y \leqq -x + 1 \right\}$$

となる。

(4) $J$ を 3 重積分の累次積分の形で表せ。

$$\iiint_D dx dy dz = \int_0^1 \left( \int_0^z \left( \int_{-x+z}^{-x+1} z\, dy \right) dx \right) dz$$

(5) $J$ を求めよ。

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \left( \int_0^z \left( \int_{-x+z}^{-x+1} z\, dy \right) dx \right) dz \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^z z(1 - z)\, dx \right) dz \\ &= \int_0^1 z^2 (1 - z)\, dz = \frac{1}{12} \end{aligned}$$