解析学 I 第 1 回試験

2011–12–1　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 $y = \dfrac{1}{x^3}$ を定義に基づき微分せよ。

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x^3}\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{(x+h)^3}-\dfrac{1}{x^3}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{x^3}{x^3(x+h)^3}-\frac{(x+h)^3}{x^3(x+h)^3}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{x^3-x^3-3x^2h-3xh^2-h^3}{x^3(x+h)^3} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{-3x^2h-3xh^2-h^3}{x^3(x+h)^3}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{h(-3x^2-3xh-h^2)}{x^3(x+h)^3} = \lim_{h\to 0}\frac{-3x^2-3xh-h^2}{x^3(x+h)^3}\\ &= \frac{-3x^2}{x^6} = \frac{-3}{x^4}\end{aligned}$$

2 $y = a^{x^2+1}\cos\left(x^2+2x\right)$ を微分せよ。$(a^x)' = a^x\log a$, $(\cos x)' = -\sin x$ 等の諸公式を用いてよい。

$$\begin{aligned}\left(a^{x^2+1}\cos\left(x^2+2x\right)\right)' &= \left(a^{x^2+1}\right)'\cos\left(x^2+2x\right) + a^{x^2+1}\left(\cos\left(x^2+2x\right)\right)'\\ &= 2xa^{x^2+1}\log a\cos\left(x^2+2x\right) - (2x+2)a^{x^2+1}\sin\left(x^2+2x\right)\end{aligned}$$

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{3}}$ $y=f(x)=\cos x$ とおく。$x=a+h,\ \varepsilon(h)=\dfrac{f(a+h)-(A+Bh+Ch^2)}{h^2}$ とおく。$\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ が成立するとき $A+Bh+Ch^2$ を $x=a$ で $y=f(x)=f(a+h)$ を一番よく近似する 2 次式という。$x=\dfrac{\pi}{4}$ で $y=f(x)=f(a+h)$ を一番よく近似する 2 次式を求めよ。

求める 2 次式を $g(h)=A+Bh+Ch^2$ とする。$\varepsilon(h)h^2=f\left(\dfrac{\pi}{4}+h\right)-g(h)$ に対し $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)h^2=0$ が成立する。

$$
\begin{aligned}
0&=\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)h^2=\lim_{h\to 0}\left(f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-g(h)\right)\\
&=f\left(\frac{\pi}{4}\right)-g(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}-A
\end{aligned}
$$

より $A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。

$\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)h=0$ が成立するので

$$
\begin{aligned}
0&=\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)h=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-g(h)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f'\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-g'(h)}{h'}=\lim_{h\to 0}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-g'(h)\right)\\
&=-\sin\frac{\pi}{4}-g'(0)=-\frac{1}{\sqrt{2}}-B
\end{aligned}
$$

より $B=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。計算途中でロピタルの定理を使用した。

$\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ が成立するので

$$
\begin{aligned}
0&=\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-g(h)}{h^2}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f'\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-g'(h)}{(h^2)'}=\lim_{h\to 0}\frac{f'\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-g'(h)}{2h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f''\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-g''(h)}{(2h)'}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-g''(h)\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4}-g''(0)\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-2C\right)
\end{aligned}
$$

より $C=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ である。。計算途中でロピタルの定理を使用した。

よって求める 2 次式は

$$
g(h)=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}h-\frac{1}{2\sqrt{2}}h^2
$$

である。

$\boxed{\mathbf{4}}$ $y=f(x)=\log(x+2)$ を $x=1$ でテーラー展開することを考える。次の問いに答えながら，テーラー展開を求めよ。

(1) $f'(x)$ および $f''(x)$，$f^{(3)}(x)$，$f^{(4)}(x)$ を求めよ。

$$f'(x)=\frac{1}{x+2} \qquad f''(x)=-\frac{1}{(x+2)^2}$$
$$f^{(3)}(x)=\frac{2}{(x+2)^3} \qquad f^{(4)}(x)=-\frac{6}{(x+2)^4}$$

(2) 自然数 n に対し $f^{(n)}(x)$ を予想し，それが正しいことを数学的帰納法で証明せよ。

$f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x+2)^n}$ と予想できる。この命題を $P(n)$ とする。

$f^{(1)}(x)=\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{(-1)^{1+1}(1-1)!}{(x+2)^1}$ なので $n=1$ のとき $P(n)$ は正しい。

$P(k)$ の成立，即ち $f^{(k)}(x)=\dfrac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(x+2)^k}$ の成立を仮定する。両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(\frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(x+2)^k}\right)'=(-1)^{k+1}(k-1)!\left((x+2)^{-k}\right)' \\ &= (-1)^{k+1}(k-1)!(-k)(x+2)^{-k-1} \\ &= \frac{(-1)^{k+1}(-1)k(k-1)!}{(x+2)^{k+1}}=\frac{(-1)^{(k+1)+1}((k+1)-1)!}{(x+2)^{k+1}} \end{aligned}$$

を得る。よって $P(k+1)$ も成立しているので，数学的帰納法よりすべての自然数で成立する。

(3) $y=f(x)=\log(x+2)$ を $x=1$ でテーラー展開せよ。

(2) の結果より $n\geqq 1$ に対し $f^{(n)}(1)=\dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{3^n}$ となる。また $f^{(0)}(1)=f(1)=\log 3$ である。よって

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(1)(x-1)^n=f(1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(1)(x-1)^n \\ &= \log 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{(x-1)^n}{3^n} \end{aligned}$$

となる。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の様にパラメータ表示された曲線の概形を書け。

$$x = x(t) = 2t^4 - t, \qquad y = y(t) = t^2 - t^3$$

$x'(t) = 8t^3 - 1, y'(t) = 2t - 3t^2$ なので $x'(t) = 0$ を解くと，$8t^3 - 1 = (2t-1)(4t^2+2t+1) = 0$ より $t = \dfrac{1}{2}$ を得る。$y'(t) = 0$ を解くと，$t(2-3t) = 0$ より $t = 0, \dfrac{2}{3}$ を得る。$x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために，途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

t		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	
x'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y	$\downarrow$		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\downarrow$
曲線	$\swarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$

$x'(t) = 0$ および $y'(t) = 0$ となる点は $(0,0)$，$\left(-\dfrac{3}{8}, \dfrac{1}{8}\right)$，$\left(-\dfrac{22}{81}, \dfrac{4}{27}\right)$，である。$y(t) = 0$ を解くと $t = 0, 1$ を得る。x 軸との交点は $(0,0), (1,0)$ である。$x(t) = 0$ を解くと $t = 0, \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ を得る。y 軸との交点は $(0,0)$，$\left(0, \dfrac{\sqrt[3]{2}}{2} - \dfrac{1}{2}\right)$ である。以上を考慮して曲線の概形を描くと次の様になる。