解析学 I 第 2 回試験

2012–1–20　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ。

(1) $z = f(x,y) = x^2y^2$ とする。定義に基づき $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2(y+h)^2 - x^2y^2}{h} \\
&= x^2\lim_{h\to 0}\frac{y^2+2yh+h^2-y^2}{h} = x^2\lim_{h\to 0}\frac{h(2y+h)}{h} \\
&= x^2\lim_{h\to 0}(2y+h) = 2x^2y
\end{aligned}
$$

(2) $z = f(x,y) = \sin\left(x^2y^2\right)\log(x^3y^3)$ に対し $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を求めよ。微分の諸公式を使用してよい。

$$
\begin{aligned}
z_x &= \left(\sin\left(x^2y^2\right)\log(x^3y^3)\right)_x = \left(\sin\left(x^2y^2\right)\right)_x\log(x^3y^3) + \sin\left(x^2y^2\right)\left(\log(x^3y^3)\right)_x \\
&= 2xy^2\cos\left(x^2y^2\right)\log(x^3y^3) + \sin\left(x^2y^2\right)\frac{3x^2y^3}{x^3y^3} \\
&= 2xy^2\cos\left(x^2y^2\right)\log(x^3y^3) + \sin\left(x^2y^2\right)\frac{3}{x}
\end{aligned}
$$

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ $f(a+h, b+k)$ を (a,b) で一番よく近似する 1 次式 $g(h,k)$ とは，$g(h,k)$ が h, k に関する 1 次式であり，$\varepsilon(h,k) = \dfrac{f(a+h,b+k)-g(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ とおくとき $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$ が成立するときをいう。$z = f(x,y) = x^2y^2$ とするとき，$f(h,k)$ を $(1,1)$ で最もよく近似する 1 次式を定義に基づいて求めよ。

$f(1+h,1+k) = (1+h)^2(1+k)^2 = (1+2h+2k) + h^2 + 4hk + k^2 + 2h^2k + 2hk^2 + h^2k^2$ なので $g(h,k) = 1+2h+2k$ とおくと $f(1+h,1+k) - g(h,k) = h^2 + 4hk + k^2 + 2h^2k + 2hk^2 + h^2k^2$ である。

$h = r\cos\theta, k = r\sin\theta$ とおくと $(h,k)\to(0,0)$ のとき $r\to 0$ であり，逆も成立している。$p+q \geqq 2$ とすると，

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^pk^q}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^p\cos^p\theta r^q\sin^q\theta}{r} = \lim_{r\to 0} \frac{r^{p+q}\cos^p\theta\sin^q\theta}{r}$$
$$= \lim_{r\to 0}\left(r^{p+q-1}\cos^p\theta\sin^q\theta\right) = 0$$

となる。$f(1+h,1+k) - g(h,k)$ の項 h^pk^q はすべて $p+q \geqq 2$ を満たしているので

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(1+h,1+k)-g(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

となる。よって求める 1 次式は

$$g(h,k) = 1+2h+2k$$

である。

$\boxed{\mathbf{3}}$ $z = x^2+y^2, s = x\cos y, t = x\sin y$ について次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{D(s,t)}{D(x,y)}$ を求めよ。

$$\frac{D(s,t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{pmatrix}$$

(2) $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ を求めよ。

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \left(\frac{D(s,t)}{D(x,y)}\right)^{-1} = \frac{1}{\cos y\cdot x\cos y + \sin y\cdot x\sin y}\begin{pmatrix} x\cos y & x\sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{x}\begin{pmatrix} x\cos y & x\sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix}$$

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ を求めよ。

(2) より $x_s = \cos y, y_s = -\dfrac{\sin y}{x}$ であり，$z_x = 2x, z_y = 2y$ なので

$$\frac{\partial z}{\partial s} = z_xx_s + z_yy_s = 2x\cos y - 2y\frac{\sin y}{x}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $z = f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2y^2$ について次の問いに答えよ。

(1) $z = f(x,y)$ の臨界点 ($\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ かつ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ となる点) を求めよ。

最初に極値候補となる臨界点を求めよう。

$$z_x = 4x^3 + 4xy^2 = 0 \tag{1}$$

$$z_y = 4y^3 + 4x^2y - 4y = 0 \tag{2}$$

の共通解が求めるものになる。(1) 式は $x = 0 \vee x^2 + y^2 = 0$ であるが，$x^2 + y^2 = 0 \iff (x,y) = (0,0)$ なので (1) $\iff x = 0$ となる。

(2) $\iff y = 0 \vee y^2 + x^2 - 1 = 0$ なので $y = 0$ のときは $(x,y) = (0,0)$ を得る。$y^2 + x^2 - 1 = 0$ のときは $x = 0$ を式の代入して $y^2 - 1 = 0$ を得る。このとき $y = \pm 1$ である。

以上により臨界点 $(x,y) = (0,0), (0,1), (0,-1)$ を得る。

(2) $z = f(x,y)$ の極点を求めよ。

$H(x,y) = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2$ をヘッシャンとする。$z_{xx} = 12x^2 + 4y^2$, $z_{xy} = 8xy$, $z_{yy} = 12y^2 + 4x^2 - 4$ なので $H(0,\pm 1) = 32 > 0$ となり，$(0,\pm 1)$ は極点である。

$H(0,0) = 0$ なので $(0,0)$ の様子は個別に調べなければならない。

x–軸上に制限して考えると，$f(x,0) = x^4$ である。x–軸上では $(0,0)$ は極小，即ちいくらでも近くに $f(0,0)$ より大きな値を取る点が存在する。y–軸上に制限すると $f(0,y) = y^4 - 2y^2$ でこの 4 次関数は y–軸上では $(0,0)$ で極大，即ちいくらでも近くに $f(0,0)$ より小さい値を取る点が存在する。2 つを合わせると $(0,0)$ が極値でない事が分かる。

以上により極点は $(0,1), (0,-1)$ の 2 点である。

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{5}}$ 辺の和が一定の直方体の中で体積最大になるものを求めよ。

3 辺の長さを x, y, z とする。和が一定なので，それを ℓ とすると，$x+y+z=\ell$ である。体積を V とすると，$V=xyz=xy(\ell-x-y)$ である。直方体になるためには $x>0, y>0, \ell-x-y>0$ の条件が必要であるが，最大値の存在を保証するため,「つぶれた」直方体，即ち $x=0$ 等も対象にする。よって V の定義域を $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geqq 0, y \geqq 0, x+y \leqq \ell\right\}$ とする。

D は有界閉集合で，V は連続関数なので最大値が存在する。閉領域 D で定義された関数が最大値をとるとき，

(1) 領域の内部の点であり，そこで広義の極値をとる，または

(2) 境界上の点である，

のいずれかである。

境界上での値は $V=0$ で内部では V は正なので最大値は D の内部に存在する。

よって最大値をとる点は広義の極点なのでそれを求める。

$\dfrac{\partial V}{\partial x}=y(\ell-2x-y)$，$\dfrac{\partial V}{\partial y}=y(\ell-x-2y)$ より，$\dfrac{\partial V}{\partial x}=0, \dfrac{\partial V}{\partial y}=0$ を連立させて解くと $x=y=\dfrac{\ell}{3}$ を得る。

これが求めるものであるが，3 辺の長さが $x=y=\ell-x-y$ なので体積最大になるのは「立方体」である。

$\boxed{\mathbf{6}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (15)。