解析学 I 第 3 回試験

2012–2–16　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 次の問に答えよ。

(1) $y = f(x) = \dfrac{1}{x^4+1}$ を部分分数展開せよ。分母を因数分解するのに $x^4+1 = (x^2+\cdots)^2 - (\cdots)^2$ と変形するとよいかもしれない。

$$\begin{aligned} x^4+1 &= x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2 \\ &= (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1) \end{aligned}$$

と因数分解できる。

$$\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1} = \frac{1}{x^4+1}$$

とおくと $(x^2-\sqrt{2}x+1)(Ax+B)+(x^2+\sqrt{2}x+1)(Cx+D)=1$ が恒等的に成立する。これを解くにはいくつか方法があるが, ここでは代入法で解く。$x^2-\sqrt{2}x+1=0$ の解である $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ を上式に代入すると

$$2\sqrt{2}\alpha(C\alpha+D) = 1$$

が得られ，$C = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}, D = \dfrac{1}{2}$ が得られる。$x^2+\sqrt{2}x+1=0$ の解である $\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ を恒等式に代入すると

$$-2\sqrt{2}\beta(A\beta+B) = 1$$

が得られ，$A = \dfrac{\sqrt{2}}{4}, B = \dfrac{1}{2}$ が得られる。よって

$$\frac{\sqrt{2}x+2}{4(x^2+\sqrt{2}x+1)} - \frac{\sqrt{2}x-2}{4(x^2-\sqrt{2}x+1)}$$

と部分分数展開できる。

(2) $I = \displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ。$\displaystyle\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan t$ を使用してもよい。

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^4+1}\,dx &= \int \frac{\sqrt{2}\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+1}{4\left(\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\right)}\,dx - \int \frac{\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-1}{4\left(\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\right)}\,dx \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \\ &\quad - \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ 不定積分

$$I = \int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\, dx$$

を次にしたがって求めよ。

(1) $t = \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ とおき，t に関する積分に変換せよ。

$t = \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ とおくと $\sqrt{\dfrac{x}{x+1}} = \sin t$ より $\dfrac{x}{x+1} = \sin^2 t$ である。これを x について解くと $x = \dfrac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t} = \tan^2 t$ となる。$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2\sin t}{\cos^3 t}$ なので

$$I = \int t \frac{2\sin t}{\cos^3 t}\, dt$$

(2) 不定積分 I を求めよ。

$$I = \int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\, dx = \int t\left(\tan^2 t\right)'\, dt = t\tan^2 t - \int \tan^2 t\, dt$$
$$= t\tan^2 t - \tan t + t = x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{3}}$ 微分方程式

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \qquad (*)$$

について次の問に答えよ。

(1)　微分方程式 $(*)$ の一般解を求めよ。解の表示は複素関数としてのものと実関数としてのものと 2 通りの表現で書け。

微分方程式は演算子 D を用いて

$$(D^2 - 2D + 2)y = (D - (1+i))(D - (1-i))y = 0$$

と表される。

$u = (D - (1-i))y$ とおき，$e^{\lambda x} D e^{-\lambda x} = D - \lambda$ を適用すると

$$e^{(1+i)x} D e^{-(1+i)x} u = 0$$

となる。$De^{-(1+i)x}u = 0$ を積分すると定数 C_1 を用いて

$$e^{-(1+i)x} u = C_1$$

と書ける。よって $u = C_1 e^{(1+i)x}$ となる。これを $u = (D - (1-i))y$ に代入すると

$$e^{(1-i)x} D e^{-(1-i)x} y = (D - (1-i))y = u = C_1 e^{(1+i)x}$$

より

$$De^{-(1-i)x} y = C_1 e^{i2x}$$

となるので，積分すると

$$e^{-(1-i)x} y = \frac{C_1}{2i} e^{i2x} + C_2$$

となる。$\dfrac{C_1}{2i}$ を C_1 と置き直せば複素数値関数としての一般解として

$$y = C_1 e^{(1+i)x} + C_2 e^{(1-i)x}$$

が得られる。

オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を用いて書き直すと

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^x e^{ix} + C_2 e^x e^{-ix} = C_1 e^x (\cos x + i \sin x) + C_2 e^x (\cos x - i \sin x) \\ &= (C_1 + C_2)\, e^x \cos x + (iC_1 - iC_2)\, e^x \sin x \end{aligned}$$

となる。$A_1 = C_1 + C_2, A_2 = iC_1 - iC_2$ とおくと実関数としての表示

$$y = A_1 e^x \cos x + A_2 e^x \sin x$$

が得られる。

(2)　(1) で求めた解関数が実際微分方程式 $(*)$ を満たすことをチェックせよ。

$y' = C_1(1+i)e^{(1+i)x} + C_2(1-i)e^{(1-i)x}, y'' = C_1(1+i)^2 e^{(1+i)x} + C_2(1-i)^2 e^{(1-i)x}$ なので

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + 2y &= C_1(1+i)^2 e^{(1+i)x} + C_2(1-i)^2 e^{(1-i)x} - 2C_1(1+i)e^{(1+i)x} - 2C_2(1-i)e^{(1-i)x} + 2C_1 e^{(1+i)x} + 2C_2 e^{(1-i)x} \\ &= C_1 \left((1+i)^2 - 2(1+i) + 2\right) e^{(1+i)x} + C_2 \left((1-i)^2 - 2(1-i) + 2\right) e^{(1-i)x} \\ &= 0C_1 e^{(1+i)x} + 0C_2 e^{(1-i)x} = 0 \end{aligned}$$

となるので，チェックできた。

別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

$\boxed{\mathbf{4}}$ 微分方程式

$$y'' - 2y' + 2y = \sin(3x)$$

の一般解を求めよ。解は複素関数としての表示でよい。

特殊解を $y_2 = A\sin 3x + B\cos 3x$ と予想する。$y_2' = 3A\cos 3x - 3B\sin 3x, y_2'' = -9A\sin 3x - 9B\cos 3x$ なので

$$y_2'' - 2y_2' + 2y_2 = (-7A + 6B)\sin 3x - (7B + 6A)\cos 3x = \sin 3x$$

が成立する。これより $-7A + 6B = 1, 7B + 6A = 0$ である。これを解いて $A = -\frac{7}{85}, B = \frac{6}{85}$ を得るので

$$y_2 = -\frac{7}{85}\sin 3x + \frac{6}{85}\cos 3x$$

である。前問で求めたように $y'' - 2y' + 2y = 0$ の一般解は $y_1 = C_1 e^{(1+i)x} + C_2 e^{(1-i)x}$ なので，一般解は

$$y = y_1 + y_2 = C_1 e^{(1+i)x} + C_2 e^{(1-i)x} - \frac{7}{85}\sin 3x + \frac{6}{85}\cos 3x$$

である。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = a^2 - y^2 \qquad (a > 0)$$

を変数分離型で解け。

$a^2 - y^2 = \frac{dy}{dx}$ より $\frac{1}{a^2 - y^2}dy = dx$ となり，

$$\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a-y} + \frac{1}{a+y}\right)dy = dx$$

と変形して積分すると，

$$\frac{1}{2a}\left(\log|a+y| - \log|a-y|\right) = x + C_1$$

を得る。

$$\log\left|\frac{a+y}{a-y}\right| = 2a(x + C_1)$$

となるので，

$$\left|\frac{a+y}{a-y}\right| = \exp\left(2a(x + C_1)\right)$$

となる。よって

$$y = a\frac{\pm\exp\left(2a(x + C_1)\right) - 1}{\pm\exp\left(2a(x + C_1)\right) + 1}$$

を得る。

$\boxed{\mathbf{6}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (5)。

別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	