解析学 II 第 1 回試験

2011–5–30　　河野

注意: ・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

$\boxed{\textbf{1}}$ 次の問に答えよ。

(1) 1 変数関数 $y = f(x)$ の不定積分の定義を述べよ。

(2) 1 変数関数 $y = f(x)$ の区間 $[a, b]$ における定積分の定義を述べよ。

(3) $\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx$ は積分可能か。不可能な場合はその事を示し。可能な場合は定義に基づいて積分を計算せよ。ただし 連続関数が積分可能であることは仮定してよい。$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ を用いるかもしれない。

(1) 関数 $F(x)$ で $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$ となるものが存在するとき，$F(x)$ を $f(x)$ の不定積分といい，$\displaystyle\int f(x)\,dx$ で表す。

(2) $\Delta = \{\, x_0, x_1, \ldots, x_n \,\}$ が $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ を満たすとき $[a, b]$ の分割という。各 i $(i = 1, \ldots, n)$ に対し

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

とおき，$\max\{\, \Delta x_i \mid i = 1, \ldots, n \,\}$ を分割の最大幅といい $\|\Delta\|$ で表す。各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ から点 c_i を任意に選び,

$$\Sigma(\Delta; \{\, c_i \,\}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

とおく。$\Sigma(\Delta; \{\, c_i \,\})$ をリーマン和という。$\|\Delta\|$ を 0 に近づけたとき $\{\, c_i \,\}$ の選び方によらずに一定の値に近づくとき，$f(x)$ は $[a, b]$ で積分可能であるといい,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \Sigma(\Delta; \{\, c_i \,\})$$

を定積分という。

(3) 分割 Δ_n を n 等分割とする。即ち $x_i = 1 + \dfrac{i}{n}$ とする。$y = x^2$ は連続関数なので，積分可能であることが知られている。即ち $\{\, c_i \,\}$ の選び方によらないことが知られている。よって $c_i = x_i = 1 + \dfrac{i}{n}$ とする。

$$\begin{aligned}
\Sigma(\Delta; \{\, c_i \,\}) &= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{2i}{n} + \frac{i^2}{n^2}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(n + \frac{2}{n}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\
&= 1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

となるので

$$\int_1^2 x^2\,dx = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{7}{3}$$

である。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\textbf{2}}$ 次の広義積分は収束するか。収束しないときはそのことを示し，収束するときは計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x-1}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{(x+1)(x+3)}\,dx$

(1) $x=1$ のとき関数は値を持たないので

$$\int_0^2 \frac{1}{x-1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx$$

としたとき，$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx, \int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx$ の両方の広義積分が収束するとき $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x-1}\,dx$ も収束する。

$\varepsilon > 0$ を十分小さくとり，$I(\varepsilon) = \displaystyle\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{1}{x-1}\,dx$ とおくと

$$I(\varepsilon) = \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{1}{x-1}\,dx = \Big[\log|x-1|\Big]_{1+\varepsilon}^2 = \log 1 - \log\varepsilon = -\log\varepsilon$$

となる。$\varepsilon \to +0$ のとき $\log\varepsilon \to -\infty$ となるので，広義積分 $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx$ は収束しない，よって広義積分 $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x-1}\,dx$ も収束しない。

(2) $M > 1$ なる M に対し $I(M) = \displaystyle\int_1^M \frac{1}{(x+1)(x+3)}\,dx$ と置く。

$$\begin{aligned}
I(M) &= \int_1^M \frac{1}{(x+1)(x+3)}\,dx = \int_1^M \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\Big[\log(x+1) - \log(x+3)\Big]_1^M = \frac{1}{2}\left(\log(M+1) - \log(M+3) - \log 2 + \log 4\right) \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{4(M+1)}{2(M+3)} = \frac{1}{2}\log\frac{4\left(1+\dfrac{1}{M}\right)}{2\left(1+\dfrac{3}{M}\right)}
\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{(x+1)(x+3)}\,dx &= \lim_{M\to\infty} I(M) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2}\log\frac{4\left(1+\dfrac{1}{M}\right)}{2\left(1+\dfrac{3}{M}\right)} \\
&= \frac{1}{2}\log 2
\end{aligned}$$

となる。

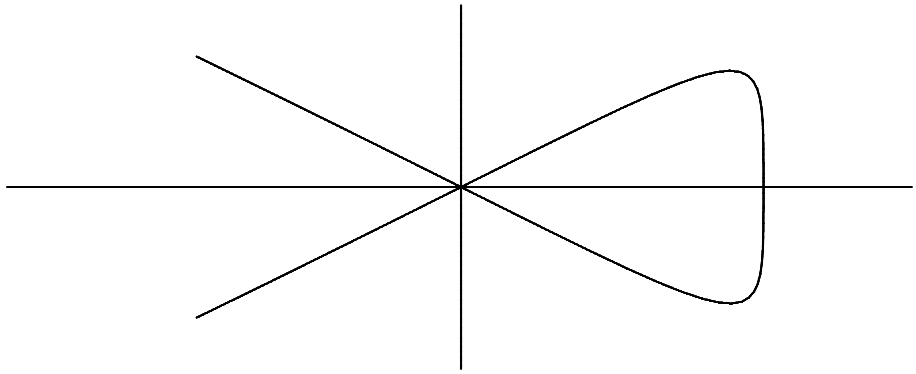
$\boxed{\mathbf{3}}$ $x = x(t) = 1 - t^4, y = y(t) = t - t^3$ でパラメータ表示された曲線について次の問に答えよ。

(1) この曲線の概形を書け。
(2) この曲線によって囲まれる部分の面積を求めよ。

(1) $x'(t) = -4t^3, y'(t) = 1 - 3t^2$ なので $t == 0$ のとき $x'(t) = 0$, $t = \mp\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $y'(t) = 0$ となる。間の正負を調べると増減表は次の様になる。

		$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	
x'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
x	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y	$\downarrow$		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\downarrow$
曲線	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\nearrow$

$x(t) = 0$ を解いて $t = \pm 1$, $y(t) = 0$ を解いて $t = 0, \pm 1$ を得る。$(x(0), y(0)) = (1, 0), (x(1), y(1)) = (0, 0), (x(-1), y(-1)) = (0, 0)$ が x 軸及び y 軸との交点である。これらを考慮して曲線を描くと次図の様になる。



(2) 閉曲線になっているのは $t = -1$ から $t = 1$ の範囲である。t が -1 から 1 へ動くとき, 点 $(x(t), y(t))$ は領域の境界を反時計回りに動く。よって求める面積を S とするとき,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \big(x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\big)\, dt \\ &= \frac{16}{35} \end{aligned}$$

を得る。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学 科		在番 籍号		氏 名	

$\boxed{\mathbf{4}}$ $r = f(\theta) = 1 + \cos\theta$ と極座標表示されている曲線を心臓形という。この曲線によって囲まれる部分の面積を求めよ。

$\cos x$ は周期 2π の周期関数であり，$f(\theta) = 1 + \cos\theta \geqq 0$ に注意すると積分は 0 から 2π まで行えばよいことが分かる。よって面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (f(\theta))^2 \, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \bigl(1 + \cos\theta\bigr)^2 \, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \bigl(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta\bigr) \, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos\theta + \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}\right) d\theta \\
&= \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}
$$

である。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (10)。