解析学 II 第 2 回試験

2011–8–9　　河野

注意: ・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 (1) 領域 $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d \right\}$ を長方形領域とする。関数 $f(x, y)$ の D における重積分 $\displaystyle\iint_D f(x, y)dxdy$ の定義を述べよ。

D の分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n \,;\, y_0, y_1 \dots, y_m\}$ とは $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$ となるものとする。i, j $(i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m)$ に対し小長方形領域 Δ_{ij} を

$$\Delta_{ij} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j \right\}$$

で定義する。各小領域 Δ_{ij} からそこに属する点 $P_{ij} = (c_{ij}, d_{ij})$ を 1 つ定める。$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$,$\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ とおき，リーマン和を

$$\Sigma(\Delta; \{ P_{ij} \}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(c_{ij}, d_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

と定義する。分割の最大幅 $\|\Delta\|$ を $\|\Delta\| = \max \{ \Delta x_i, \Delta y_j \mid i = 1, \dots, n\,,\ j = 1, \dots, m \}$ で定義する。$\|\Delta\| \to 0$ とするとき，$\Sigma(\Delta; \{ P_{ij} \})$ が P_{ij} の選び方によらず同じ極限値に収束するならば，f は D で**積分可能** (*integrable*) であるといい，極限値を

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \Sigma(\Delta; \{ P_{ij} \})$$

で表す。

(2) $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq 2, 1 \leqq y \leqq 3 \right\}$ とする。重積分

$$\iint_D xydxdy$$

を定義に基づき計算せよ。ただし,「連続関数は積分可能である」ことは仮定してよい。

Δ_n を n 等分割とする。即ち $x_i = \dfrac{2i}{n}, y_j = 1 + \dfrac{2j}{n}$ とする。分割の最大幅は $\dfrac{2}{n}$ なので $\|\Delta_n\| \to 0$ と $n \to \infty$ は同じである。f は連続なので極限は $\{ P_{ij} \}$ の選び方によらない。$P_{ij} = (x_i, y_j)$ とする。

$$\begin{aligned}
\Sigma(\Delta; \{ P_{ij} \}) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} y_{ij} \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{2i}{n} \left(1 + \frac{2j}{n} \right) \frac{2}{n} \frac{2}{n} = \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} i \left(1 + \frac{2j}{n} \right) \\
&= \frac{8}{n^3} \left(\sum_{i=1}^{n} i \right) \sum_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{2j}{n} \right) = \frac{8}{n^3} \frac{n(n+1)}{2} \left(n + \frac{2}{n} \frac{n(n+1)}{2} \right) = 4 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)
\end{aligned}$$

となるので,

$$\iint_D xydxdy = \lim_{n \to \infty} 4 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = 8$$

となる。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

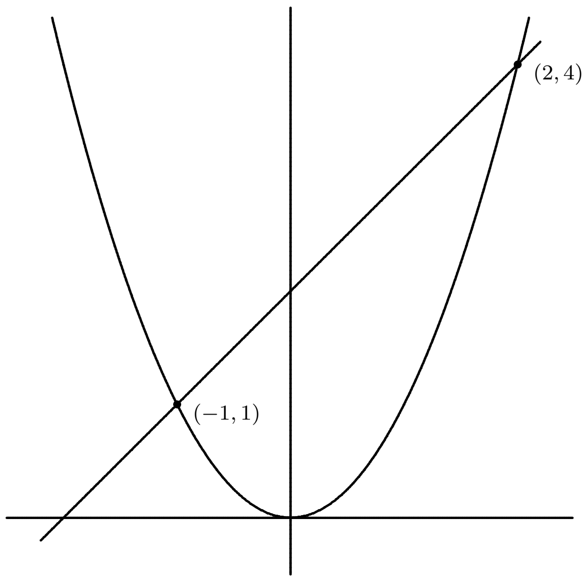
学科		在番籍号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の重積分について考える。ただし D は $y = x + 2$ と $y = x^2$ で囲まれる領域とする。

$$I = \iint_D (x+y)\,dxdy$$

(1) 領域 D を図示せよ。

$x^2 = x + 2$ を解いて $x = -1, 2$ を得る。よって交点は $(-1,1), (2,4)$ である。領域は下図の様になる。



(2) I を求めよ。

$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -1 \leqq x \leqq 2, x^2 \leqq y \leqq x+2 \right\}$ なので

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D (x+y)\,dxdy = \int_{-1}^{2} \left(\int_{x^2}^{x+2} (x+y)\ dy \right) dx \\
&= \int_{-1}^{2} \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2}^{x+2} dx = \int_{-1}^{2} \left(x(x+2) + \frac{(x+2)^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx \\
&= \frac{189}{20}
\end{aligned}$$

となる。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次に従って 積分

$$J = \iint_D \frac{1}{x^2+y^2+1} dxdy$$

を計算せよ。ただし

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \leqq 1, y \geqq 0 \right\}$$

である。

(1) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と置き，(x,y) から (r,θ) へ変数変換を行う。このときヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ。

$\dfrac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \dfrac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \dfrac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta, \dfrac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$ なのでヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

となる。

(2) D に対応する $r\theta$–平面の領域 E を $E = \left\{ (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; r \text{ と}\theta\text{の式たち} \right\}$ の形で表せ。

$y \geqq 0$ なので $0 \leqq \theta \leqq \pi$ である。よって $E = \{ (r,\theta) \mid 0 \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta \leqq \pi \}$ となる。

(3) J を r と θ の重積分の形で表せ。

この対応関係において，$r = 0, \theta = 0, \theta = 2\pi$ の部分を除いて D と E は一対一に対応し，この部分は面積 0 である。ヤコビアンが 0 になる部分も面積 0(面積確定) である。よって変数変換が可能であり

$$J = \iint_E \frac{r}{r^2+1} drd\theta$$

となる。

(4) J を求めよ。

$$J = \iint_E \frac{r}{r^2+1} drdt = \int_0^1 \left(\int_0^\pi \frac{r}{r^2+1}\, d\theta \right) dr = \pi \int_0^1 \frac{r}{r^2+1}\, dr$$

となる。ここで $t = r^2+1$ とおくと $\dfrac{dt}{dr} = 2r$ なので,

$$I = \pi \int_1^2 \frac{r}{t} \frac{1}{2r}\, dt = \frac{\pi}{2} \int_1^2 \frac{1}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} \log 2$$

となる。

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の広義積分について，収束しないときはそのことを示し，収束するときは値を求めよ。ただし $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqq 0, y \geqq 0 \right\}$ である。

$$I = \iint_D \frac{1}{(x+y+1)^2} dxdy$$

自然数 n に対し $A_n = \{ 0 \leqq x \leqq n, 0 \leqq y \leqq n - x \}$ とおくと $\{A_n\}$ は D の近似増加列になる。$I_n = \displaystyle\iint_{A_n} \frac{1}{(x+y+1)^2} dxdy$ とおく。

$$\begin{aligned} I_n &= \iint_{A_n} \frac{1}{(x+y+1)^2} dxdy = \int_0^n \left(\int_0^{n-x} \frac{1}{(x+y+1)^2}\, dy \right) dx \\ &= \int_0^n \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{n+1} \right) dx = \log(n+1) - \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

となるので $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ は収束しない。よって広義積分は収束しない。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次に従って 3 重積分

$$J = \iiint_D dxdydz$$

を計算せよ。ただし R は正の定数で，

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqq R^2,\ z \geqq 0 \right\}$$

である。

(1) $x = r \sin\theta \cos\varphi, y = r \sin\theta \sin\varphi, z = r\cos\theta)$ とおくとき (x, y, z) から (r, θ, φ) に座標変換を行う。このときヤコビ行列 $\dfrac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)}$ を実際に計算し求めよ。

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} &= \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= r^2\sin\theta \left(\cos^2\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \sin\theta^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \right) = r^2 \sin\theta \end{aligned}$$

(2) この対応で D に対応する $r\theta\varphi$–空間の領域を E とするとき，E を求めよ。

$z \geqq 0$ より $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるよって $E = \left\{ (r, \theta, \varphi) \,\middle|\, 0 \leqq r \leqq R, 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}, 0 \leqq \varphi \leqq \pi \right\}$

(3) J を求めよ。

この対応で面積 0 の領域を除いて D と E は一対一に対応しており，ヤコビアンが 0 の面積も 0 である。よって変数変換の条件を満たしている。

$$K = \iiint_D dxdydz = \iiint_E r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi = \frac{2\pi r^3}{3}$$

である。