解析学 II 第 2 回試験

2011–8–9　　河野

注意: ・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。再履修者以外は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 (1) 領域 $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d \right\}$ を長方形領域とする。関数 $f(x,y)$ の D における重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ の定義を述べよ。

(2) $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq 2, 1 \leqq y \leqq 3 \right\}$ とする。重積分

$$\iint_D xydxdy$$

を定義に基づき計算せよ。ただし,「連続関数は積分可能である」ことは仮定してよい。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の重積分について考える。ただし D は $y = x + 2$ と $y = x^2$ で囲まれる領域とする。

$$I = \iint_D (x + y)\, dxdy$$

(1) 領域 D を図示せよ。

(2) I を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次に従って 積分

$$J = \iint_D \frac{1}{x^2+y^2+1}\,dxdy$$

を計算せよ。ただし

$$D = \left\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \leqq 1, y \geqq 0 \,\right\}$$

である。

(1) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と置き，(x,y) から (r,θ) へ変数変換を行う。このときヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ。

(2) D に対応する $r\theta$–平面の領域 E を $E = \left\{\, (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; r \text{ と} \theta \text{の式たち} \,\right\}$ の形で表せ。

(3) J を r と θ の重積分の形で表せ。

(4) J を求めよ。

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の広義積分について，収束しないときはそのことを示し，収束するときは値を求めよ。ただし $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqq 0, y \geqq 0 \right\}$ である。

$$I = \iint_D \frac{1}{(x+y+1)^2}\, dxdy$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次に従って 3 重積分

$$J = \iiint_D dxdydz$$

を計算せよ。ただし R は正の定数で，

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqq R^2,\ z \geqq 0 \right\}$$

である。

(1) $x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta)$ とおくとき (x,y,z) から (r,θ,φ) に座標変換を行う。このときヤコビ行列 $\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}$ を実際に計算し求めよ。

(2) この対応で D に対応する $r\theta\varphi$–空間の領域を E とするとき，E を求めよ。

(3) J を求めよ。