解析学 I 第 1 回試験

2012–11–22　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。

・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。

・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 $y = a^{x^2+x}\log\left(x^3+3x\right)$ を微分せよ。$(a^x)' = a^x \log a$，$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ 等の諸公式を用いてよい。

$$\left(a^{x^2+x}\log\left(x^3+3x\right)\right)' = \left(a^{x^2+x}\right)'\log\left(x^3+3x\right) + a^{x^2+x}\left(\log\left(x^3+3x\right)\right)'$$
$$= (2x+1)a^{x^2+x}\log a\log\left(x^3+3x\right) + \frac{a^{x^2+x}(3x^2+3)}{x^3+3x}$$

2 関数 $y = f(x)$ に対し $x = a+h$，$\varepsilon(h) = \dfrac{f(a+h)-(A+Bh+Ch^2)}{h^2}$ とおく。$\displaystyle\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$ が成立するとき $g(h) = A+Bh+Ch^2$ を $x = a$ で $y = f(x) = f(a+h)$ を一番よく近似する 2 次式という。
$y = \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ とする。$x = 0$ で $y = f(x) = f(0+h)$ を一番よく近似する 2 次式を求めよ。

$\varepsilon(h)h^2 \to 0$ $(h\to 0)$ より $f(0)-A = 0$ となる。よって $A = f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。

$\varepsilon(h)h \to 0$ $(h\to 0)$ より

$$0 = \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)h = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-Bh-Ch^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-B-2Ch}{1} = f'(0)-B$$

となる。なお途中ロピタルの定理を使用した。よって $B = f'(0) = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。

$\varepsilon(h) \to 0$ $(h\to 0)$ より

$$0 = \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}h-Ch^2}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-B-2Ch}{2h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f''(h)-2C}{2} = f''(0)-2C$$

となる。なお途中ロピタルの定理を使用した。よって $C = \dfrac{f''(0)}{2} = -\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ である。

以上により求める 2 次式は

$$g(h) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}h - \frac{1}{2\sqrt{2}}h^2$$

である。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

3 テーラーの定理とは

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$

を満たす θ $(0<\theta<1)$ が存在する，というものである。$R_n=\dfrac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ を剰余項と呼ぶ。

剰余項 R_n を切り捨て $f(x)$ の近似値として，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ を採用することにより近似計算をすることができる。このとき誤差の絶対値は $|R_n|$ である。

(1) これを用いて $e^{-\frac{1}{3}}$ の近似計算を行う。$f(x)=e^x, a=0, n=3$ として近似値を計算せよ。

$f'(x)=e^x$ より，任意の自然数 n に対し $f^{(n)}(x)=e^x$ が成立する。

$$f(x)\fallingdotseq f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2$$

より

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)\fallingdotseq 1+1\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{13}{18}$$

(2) $f(x)=e^x, a=0$ として $e^{-\frac{1}{3}}$ の近似計算を行いたい。ただし，誤差の絶対値が 10^{-4} より小さくなるように n を決定し，その n を用いて近似値を計算をせよ。

$a=0, x=-\dfrac{1}{3}$ なので $c=0+\theta(x-0)$ とおくと $-\dfrac{1}{3}<c<0$ である。よって $0<e^c<e^0=1$ が成立する。

$$|R_n|=\left|\frac{e^c}{n!}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right|=\frac{e^c}{3^n n!}<\frac{1}{3^n n!}$$

である。$\dfrac{1}{3^n n!}<10^{-4}$ が成立するためには $3^n n!>10^4$ が成立すればよい。

$3^4 4!=1944<10^4$，$3^5 5!=29160>10^4$ なので $n=5$ とすればよい。

$$f(x)\fallingdotseq f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4$$

より

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)\fallingdotseq 1+1\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{24}\left(-\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1393}{1944}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $y = f(x) = \log(x+3)$ を $x = 0$ でテーラー展開することを考える。次の問いに答えながら，テーラー展開を求めよ。

(1) $f'(x)$ および $f''(x)$，$f^{(3)}(x)$，$f^{(4)}(x)$ を求めよ。

$$f'(x) = (x+3)^{-1}, \quad f''(x) = -(x+3)^{-2}, \quad f^{(3)}(x) = 2(x+3)^{-3}, \quad f^{(4)}(x) = -6(x+3)^{-4}$$

(2) 自然数 n に対し $f^{(n)}(x)$ を予想し，それが正しいことを数学的帰納法で証明せよ。

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!(x+3)^{-n}$ と予想される。$n = 1$ のときは

$$f^{(1)}(x) = (x+3)^{-1} = (-1)^{1+1}(1-1)!(x+3)^{-1}$$

なので成立している。$n = k$ のとき成立を仮定する。即ち $f^{(k)} = (-1)^{k+1}(k-1)!(x+3)^{-k}$ の成立を仮定する。両辺を微分すると

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left((-1)^{k+1}(k-1)!(x+3)^{-k}\right)' = (-1)^{k+1}(k-1)!(-k)(x+3)^{-k-1} \\ &= (-1)^{(k+1)+1}((k+1)-1)!(x+3)^{-(k+1)} \end{aligned}$$

となるので $n = k+1$ のときも成立している。

(3) $y = f(x) = \log(x+3)$ を $x = 0$ でテーラー展開せよ。

(2) より $n \geqq 1$ のとき $f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!(0+3)^{-n} = \dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{3^n}$ が成立している。$n = 0$ のときは $f^{(0)}(0) = f(0) = \log(0+3) = \log 3$ である。よって

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \\ &= \log 3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{3^k k!}x^k \\ &= \log 3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{3^k k}x^k \end{aligned}$$

となる。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

5 次の様にパラメータ表示された曲線の概形を書け。

$$x = x(t) = t^3 - t, \qquad y = y(t) = 1 - t^2$$

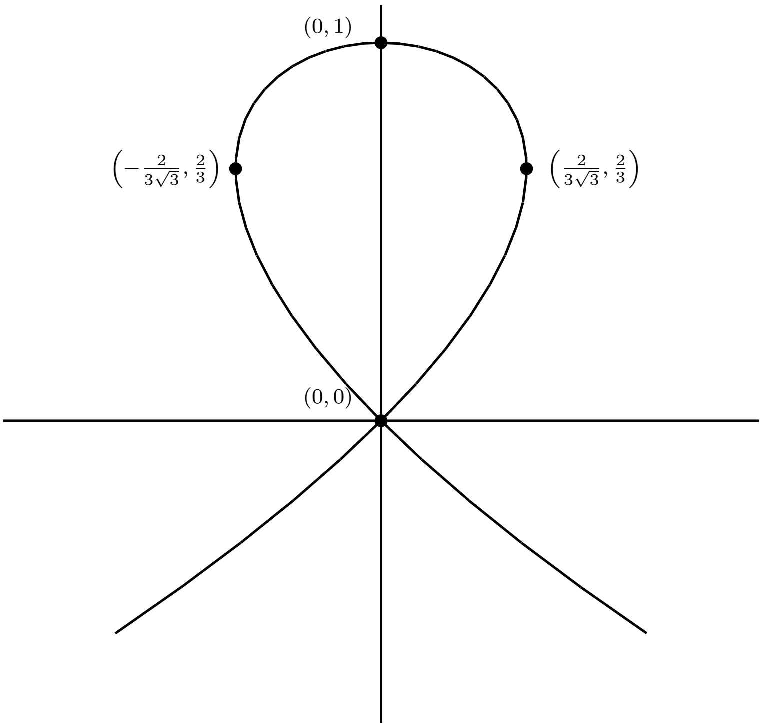
$x'(t) = 3t^2 - 1$ なので $x'(t) = 0$ を解いて $t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を得る。$y'(t) = -2t$ なので $y'(t) = 0$ を解いて $t = 0$ を得る。$x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために，途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

t		$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	
x'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$\rightarrow$		$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$		$\rightarrow$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
曲線	$\nearrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\swarrow$	$\downarrow$	$\searrow$

$x'(t) = 0$ および $y'(t) = 0$ となる点は $(x(0), y(0)) = (0, 1)$, $\left(x\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(\dfrac{2}{3\sqrt{3}}, \dfrac{2}{3}\right)$, $\left(x\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}, \dfrac{2}{3}\right)$ である。

$x(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm 1$ を得る。$(x(-1), y(-1)) = (0, 0)$, $(x(1), y(1)) = (0, 0)$, $(x(0), y(0)) = (0, 1)$ なので y 軸との交点は $(0, 0), (0, 1)$ である。

$y(t) = 0$ を解くと $t = \pm 1$ を得る。x 軸との交点は $(0, 0)$ である。以上を考慮して曲線の概形を描くと次の様になる。



6 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (10)。