解析学I第2回試験

2013–1–24　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 次の問いに答えよ。

(1) $z = f(x,y) = \sin\left(x^3y^3\right)e^{x^3y^3}$ に対し $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を求めよ。微分の諸公式を使用してよい。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^3\cos\left(x^3y^3\right)e^{x^3y^3} + 3x^2y^3\sin\left(x^3y^3\right)e^{x^3y^3}$$

2 $f(a+h,b+k)$ を (a,b) で一番よく近似する 1 次式 $g(h,k)$ とは，$g(h,k)$ が h,k に関する 1 次式であり，$\varepsilon(h,k) = \dfrac{f(a+h,b+k)-g(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ とおくとき $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k) = 0$ が成立するときをいう。$z = f(x,y) = (1+x)(2+y)$ とするとき，$f(h,k)$ を $(0,0)$ で最もよく近似する 1 次式 $g(h,k)$ を定義に基づいて求めよ。

$f(h,k) = (1+h)(2+k) = 2+2h+k+hk$ なので $g(h,k) = 2+2h+k$ と予想される。

$$\varepsilon(h,k) = \frac{f(h,k)-g(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

である。$h = r\cos\theta, k = r\sin\theta$ と置くと，$(h,k)\to(0,0)$ のとき $r\to 0$ となる。

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{r\to 0}\frac{r\cos\theta r\sin\theta}{\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}}$$
$$= \lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r} = \lim_{r\to 0} r\cos\theta\sin\theta$$

であり $-1 \leqq \cos\theta \leqq 1, -1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より

$$-r \leqq r\cos\theta\sin\theta \leqq r$$

より

$$\lim_{r\to 0} r\cos\theta\sin\theta = 0$$

となる。よって $g(h,k) = 2+2h+k$ が求める 1 次式である。

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{3}$ $z = x^2 + y^2, s = y\sin x, t = y\cos x$ について次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{D(s,t)}{D(x,y)}$ を求めよ。

$$\frac{D(s,t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\cos x & \sin x \\ -y\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

(2) $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ を求めよ。

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \left(\frac{D(s,t)}{D(x,y)}\right)^{-1} = \frac{1}{y}\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ y\sin x & y\cos x \end{pmatrix}$$

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ を求めよ。

$\dfrac{\partial x}{\partial s} = \dfrac{\cos x}{y}, \dfrac{\partial y}{\partial s} = \sin x$ であり，$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x, \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y$ なので

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \\ &= 2x\frac{\cos x}{y} + 2y\sin x\end{aligned}$$

となる。

$\boxed{4}$ 2 変数関数 $z = z(x,y)$ に対し $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくとき $\left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$ を $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を用いて表せ。

$\dfrac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \dfrac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta, \dfrac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \dfrac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$ なので

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\left(-\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta\right)\right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $z = f(x,y) = x^3 + 2xy^2 - 3x^2 - 3y^2$ について次の問いに答えよ。

(1) $z = f(x,y)$ の臨界点 ($\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ かつ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ となる点) を求めよ。

$$z_x = 3x^2 + 2y^2 - 6x, \quad z_y = 4xy - 6y$$

なので $z_y = 0$ より $y(2x-3) = 0$ となるので，$y = 0$ または $2x - 3 = 0$ となる。$y = 0$ のとき

$$z_x(x,0) = 3x^2 + 2 \cdot 0^2 - 6x = 3x^2 - 6x = 0$$

を得る。よって $y = 0$ のときは $x = 0$ または $x = 2$ である。

$x = \dfrac{3}{2}$ のとき

$$z_x\left(\frac{3}{2}, y\right) = 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2y^2 - 6 \cdot \frac{3}{2} = 0$$

を得る。よって $y = \pm\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ である。以上により臨界点は

$$(x,y) = (0,0)\,, \quad (2,0)\,, \quad \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right), \quad \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

である。

(2) $z = f(x,y)$ の極点を求めよ。

$$z_{xx} = 6x - 6, \quad z_{xy} = 4y, \quad z_{yy} = 4x - 6$$

なので

$$H(x,y) = 12(x-1)(2x-3) - 16y^2$$

となる。よって

$$H(0,0) = 36 > 0, H(2,0) = 12 > 0, H\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -18 < 0, H\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -18 < 0$$

となる。よって極値を与える (x,y) は $(0,0)$ と $(2,0)$ である。

$\boxed{\mathbf{6}}$ $1 + x + y + z + xyz = 0$ が与えられているとき，x, y を独立変数，z を従属変数とする陰関数 $z = z(x,y)$ が定義されていると考えて z_x を求めよ。

与式を x で微分すると

$$1 + z_x + yz + xyz_x = 0$$

となる。これより $z_x = -\dfrac{1+yz}{1+xy}$ を得る。

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{7}$ 定円に内接する三角形の中で面積最大のものが存在すること，および最大を与える三角形がどんなものかを求めることを考える。

定円を点 O を中心とする半径 r $(r>0)$ の円とする。円に内接する三角形を ABC とする。$\angle AOB=s, \angle BOC=t, \angle COA=u$ とするとき次の問に答えよ。

(1) $\triangle AOB$ の面積を s を用いて表せ。

$$\frac{1}{2}r^2\sin s$$

(2) $\triangle ABC$ の面積を S とするとき，S を s と t を用いて表せ。

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}r^2\sin s+\frac{1}{2}r^2\sin t+\frac{1}{2}r^2\sin u \\ &= \frac{1}{2}r^2\left(\sin s+\sin t+\sin(2\pi-s-t)\right) \end{aligned}$$

(3) 円に内接する三角形の中で面積最大の三角形が存在することを示せ。またその三角形がどのようなものかを求めよ。

$s\geqq 0, t\geqq 0, u\geqq 0$ より $D=\left\{(s,t)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq s, 0\leqq t, s+t\leqq 2\pi\right\}$ と置く。$S=S(s,t)$ の D における最大値が内部に存在すればそれが求めるものになる。

D は有界閉集合であり，$S(s,t)$ は連続関数なので最大値定理より最大値が存在する。境界上または内部の点が最大値を与える。内部の点の場合最大値を与える点は臨界点である。

最初に境界上での関数の値を考える。$L_1=\left\{(s,t)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, s=\pi, 0\leqq t\leqq\pi\right\}$, $L_2=\left\{(s,t)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq s\leqq\pi, t=\pi\right\}$, $L_3=\left\{(s,t)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq s\leqq\pi, s+t=\pi\right\}$ とおくと $\partial\overline{D}=L_1\cup L_2\cup L_3$ である。L_1 上で z は

$$\begin{aligned} z=f(\pi,t) &= \frac{1}{2}r^2\left(\sin\pi+\sin t+\sin(2\pi-\pi-t)\right) \\ &= \frac{1}{2}r^2\left(\sin t+\sin t\right)=r^2\sin t \end{aligned}$$

となるので，L_1 上で最大になるのは $(s,t)=\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)$ のときで値は $f\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)=r^2$ である。L_2 上では

$$z=f(s,\pi)=r^2\sin s$$

となるので，L_2 上で最大になるのは $(s,t)=\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ のときで値は $f\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)=r^2$ である。L_3 上では $t=\pi-s$ なので

$$\begin{aligned} z=f(s,\pi-s) &= \frac{1}{2}r^2\left(\sin s+\sin(\pi-s)+\sin(2\pi-\pi)\right) \\ &= \frac{1}{2}r^2\left(\sin s+\sin s\right)=r^2\sin s \end{aligned}$$

となる。L_3 上で最大になるのは $(s,t)=\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ のときで値は $f\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=r^2$ である。以上により境界上での最大値は r^2 で $(s,t)=\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2},\pi\right),\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ でとることが分かる。

次に臨界点を調べる。

$$z_s=\frac{1}{2}r^2\left(\cos s-\cos(2\pi-s-t)\right),\qquad z_t=\frac{1}{2}r^2\left(\cos t-\cos(2\pi-s-t)\right)$$

なので臨界点では $\cos s-\cos(2\pi-s-t)=0$ かつ $\cos t-\cos(2\pi-s-t)=0$ が成立している。これより $\cos s=\cos t$ が得られる。$0\leqq s\leqq\pi$ かつ $0\leqq t\leqq\pi$ であるが，この範囲で $\cos x$ は単射なので $s=t$ が成立する。$t=s$ を代入して $\cos s=\cos(2\pi-2s)$ を得る。

$\pi\leqq s+t\leqq 2\pi$ より，$\pi\leqq 2s\leqq 2\pi$ が成立している。$-2\pi\leqq -2s\leqq -\pi$，$0\leqq 2\pi-2s\leqq\pi$ と変形できる。この範囲で $\cos x$ は単射なので $s=2\pi-2s$ が成立する。よって臨界点は $(s,t)=\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ である。

$$f\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2>r^2=f\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)=f\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

なので f は $(s,t)=\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ で最大値をとる。$s=t=u=\frac{2\pi}{3}$ なので最大になる 3 角形は正 3 角形である。