解析学 I 第 3 回試験

2013–2–14　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 次の問に答えよ。(問題は次ページにも続く)

(1) $y = \dfrac{-x^4+x^3-19x^2+10x-91}{(x^2+9)^2(x-1)}$ を部分分数展開せよ。

$g(x) = -x^4+x^3-19x^2+10x-91, f(x) = (x^2+9)^2(x-1)$ とおく。

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g_1(x)}{(x^2+9)^2} + \frac{A}{x-1}$$

と部分分数展開できるので,

$$A(x^2+9)^2 + g_1(x)(x-1) = g(x)$$

が成立している。この式に $x=1$ を代入すると $A=-1$ が得られる。

$$\frac{g_1(x)}{(x^2+9)^2} = \frac{g(x)}{f(x)} + \frac{1}{x-1} = \frac{g(x)+(x^2+9)^2}{(x^2+9)^2(x-1)} = \frac{(x-1)(x^2+10)}{(x^2+9)^2(x-1)} = \frac{x^2+10}{(x^2+9)^2}$$

となるので

$$\frac{-x^4+x^3-19x^2+10x-91}{(x^2+9)^2(x-1)} = \frac{x^2+10}{(x^2+9)^2} - \frac{1}{x-1}$$

と部分分数展開できる。

(2) $J_2 = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+9)^2}\,dx,\ J_1 = \int \frac{1}{(x^2+9)}\,dx$ とする。$\dfrac{1}{x^2+9} = \dfrac{x^2+9}{(x^2+9)^2} = \dfrac{x^2}{(x^2+9)^2} + \dfrac{9}{(x^2+9)^2}$ の両辺を積分することにより $J_2 = \dfrac{x}{18(x^2+9)} + \dfrac{1}{18}J_1$ を導け。

式を積分すると

$$J_1 = \int \frac{x^2}{(x^2+9)^2}\,dx + 9J_2 \tag{1}$$

となる。

$$\int \frac{x^2}{(x^2+9)^2}\,dx = \int x\left(-\frac{1}{2(x^2+9)}\right)'\,dx = -\frac{x}{2(x^2+9)} + \int \frac{1}{2(x^2+9)}\,dx = -\frac{x}{2(x^2+9)} + \frac{1}{2}J_1$$

を式 (1) に代入すると

$$J_1 = -\frac{x}{2(x^2+9)} + \frac{1}{2}J_1 + 9J_2$$

が得られ,

$$J_2 = \frac{x}{18(x^2+9)} + \frac{1}{18}J_1$$

が得られる。

別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

(3) $I=\displaystyle\int \frac{-x^4+x^3-19x^2+10x-91}{(x^2+9)^2(x-1)}\,dx$ を求めよ。$\displaystyle\int \frac{1}{t^2+1}\,dt=\arctan t$ を使用してもよい。

$$\int \frac{-x^4+x^3-19x^2+10x-91}{(x^2+9)^2(x-1)}\,dx = \int \frac{1}{x^2+9}\,dx+\int \frac{1}{(x^2+9)^2}\,dx-\int \frac{1}{x-1}\,dx = J_1+J_2-\log|x-1|$$

である。

$x=3t$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=3$ なので

$$J_1 = \int \frac{1}{x^2+9}\,dx = \int \frac{3}{9t^2+9}\,dt = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{3}\arctan t = \frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}$$

となる。(2) の結果

$$J_2 = \frac{x}{18(x^2+9)}+\frac{1}{18}J_1$$

を用いると

$$I = \frac{x}{18(x^2+9)}+\frac{19}{54}\arctan\frac{x}{3}-\log|x-1|$$

$\boxed{2}$ 不定積分

$$I=\int \frac{1}{\sin x}\,dx$$

を次にしたがって求めよ。$t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおく。

(1) $\sin x=\sin 2\left(\dfrac{x}{2}\right)$ と考えることにより，$\sin x$ を t を用いて表せ。途中で $\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)=1$ を使用するかもしれない。

$$\sin x = \sin 2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}$$

(2) $\dfrac{dt}{dx}$ を t を用いて表せ。

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}(1+t^2)$$

(3) 不定積分 I を変数変換して t に関する不定積分の形に直せ。

$$I = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt$$

(4) 不定積分 I を求めよ。

$$I = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$$

となる。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 微分方程式

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \qquad (*)$$

の一般解を求めよ。解く方法は何でもよいが，演算子法を用いるときは

$$D - \lambda = e^{\lambda x} D e^{-\lambda x}$$

が役に立つかもしれない。

微分方程式 $(*)$ は微分演算子 D を用いて

$$(D^2 - 4D + 4)y = (D-2)(D-2)y = 0$$

と書ける。$u = (D-2)y$ とおくと u の満たす微分方程式は

$$(D-2)u = 0$$

である。これを $e^{2x} D e^{-2x} u = 0$ と変形して，$v = e^{-2x}u$ とおき，両辺に左から e^{-2x} をかけると v の満たす微分方程式は

$$Dv = 0$$

となる。

$$v = \int 0\, dx = C_1 \qquad (C_1 \text{ は積分定数})$$

よって $u = C_1 e^{2x}$ が得られる。これを $(D-2)y = u$ に代入すると，y に関する 1 階の微分方程式

$$(D-2)y = C_1 e^{2x}$$

が得られる。これを

$$e^{2x} D e^{-2x} y = C_1 e^{2x}$$

と変形し，$z = e^{-2x}y$ とおき，両辺の左から e^{-2x} をかけると z に関する微分方程式

$$Dz = C_1$$

が得られる。

$$z = \int C_1\, dx = C_1 x + C_2 \qquad (C_2 \text{ は積分定数})$$

よって

$$y = e^{2x} z = C_1 x e^{2x} + C_2 e^{2x}$$

が得られる。

別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{4}}$ 微分方程式

$$y'' - 4y' + 4y = \sin x \qquad (**)$$

の一般解を求めよ。ただし，問題 3 の微分方程式 $(*)$ の解は既知としてよい。

$(**)$ の一般解は $(*)$ の一般解と $(**)$ の特殊解の和で与えられる。$(*)$ の一般解は問題 3 ですでに求めているので，ここでは $(**)$ の特殊解を 1 つ見つければよい。

特殊解 y_1 を $y_1 = a\sin x + b\cos x$ の形をしていると予想する。

$$y_1' = a\cos x - b\sin x$$
$$y_1'' = -a\sin x - b\cos x$$

なのでこれを $(**)$ の左辺に代入すると

$$(-a\sin x - b\cos x) - 4(a\cos x - b\sin x) + 4(a\sin x + b\cos x) = (3a+4b)\sin x + (-4a+3b)\cos x$$

となる。これが $(**)$ の右辺，即ち $\sin x$ になるためには $3a+4b=1, -4a+3b=0$ であればよい。よって

$$y_1 = \frac{3}{25}\sin x + \frac{4}{25}\cos x$$

が得られるが，これは $(**)$ の解になっている。以上により $(**)$ の一般解

$$y = C_1 x e^{2x} + C_2 e^{2x} + \frac{3}{25}\sin x + \frac{4}{25}\cos x$$

が得られる。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 曲線 $y = f(x)$ 上の点を P とする。P における法線が x 軸と交わる点を N，P から x 軸へ下ろした垂線の足を Q とすると線分 QN の長さが常に一定である。$y = f(x)$ が満たす微分方程式を求めよ。

点 $P(x,y)$ における接線の方程式は $Y = y'(X-x)+y$ なので，法線の方程式は

$$Y = -\frac{1}{y'}(X-x)+y$$

である。N は法線上の点なので座標を $(x_0, 0)$ とすると，$0 = -\frac{1}{y'}(x_0 - x) + y$ が成立する。今 $x_0 - x$ が一定なのでこれを C(定数) とおくと微分方程式

$$y'y = C$$

を得る。

$\boxed{\mathbf{6}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (10)。