解析学 I 第 2 回試験

2014–1–27　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 関数 $z = f(x,y) = \sin\left(x^2y^2\right)\log(x^2+y^2)$ に対し $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を求めよ。微分の諸公式を使用してよい。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2\cos(x^2y^2)\log(x^2+y^2) + \sin(x^2y^2)\frac{2x}{x^2+y^2}$$

2 テーラーの定理とするとき,

$$f(a+h,b+k) = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}D^jf(a,b) + \frac{1}{n!}D^nf(a+\theta h, b+\theta k)$$

を満たす θ $(0<\theta<1)$ が存在するというものである。ここで $D^jf(a,b) = \sum_{r=0}^{j} {}_jC_r h^{j-r}k^r \dfrac{\partial^j}{\partial x^{j-r}\partial y^r}f(a,b)$ である。$f(a+h,b+k)$ を (a,b) で一番よく近似する 1 次式 $g(h,k)$ とは，$g(h,k)$ が h,k に関する 1 次式であり，$\varepsilon(h,k) = \dfrac{f(a+h,b+k)-g(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ とおくとき $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k) = 0$ が成立するときをいう。

(1) $z = f(x,y) = e^xe^{2y}$ に対し $\displaystyle\sum_{j=0}^{1}\frac{1}{j!}D^jf(0,0) + \frac{1}{2!}D^2f(0+\theta h, 0+\theta k)$ を計算せよ。

$f_x(x,y) = e^xe^{2y}, f_y(x,y) = 2e^xe^{2y}, f_{xx}(x,y) = e^xe^{2y}, f_{xy} = 2e^xe^{2y}, f_{yy}(x,y) = 4e^xe^{2y}$ なので

$$\begin{aligned} f(h,k) &= f(0,0) + hf_x(0,0) + kf_y(0,0) + \frac{1}{2}\left(h^2f_{xx}(\theta h,\theta k) + 2hkf_{xy}(\theta h,\theta k) + k^2f_{yy}(\theta h,\theta k)\right) \\ &= 1 + h + 2k + \frac{1}{2}\left(e^{\theta h}e^{2\theta k}h^2 + 4e^{\theta h}e^{2\theta k}hk + 4e^{\theta h}e^{2\theta k}k^2\right) \end{aligned}$$

(2) $z = f(x,y) = e^xe^{2y}$ とするとき，$f(h,k)$ を $(0,0)$ で最もよく近似する 1 次式 $g(h,k)$ を求めよ。

(1) より求める 1 次式は存在すれば $g(h,k) = 1+h+2k$ と予想される。$d(h,k) = f(h,k) - g(h,k) = \dfrac{1}{2}\left(h^2+4hk+4k^2\right)e^{\theta h}e^{2\theta k}$ となる。$h = r\cos s, k = r\sin s$ とおくと

$$\begin{aligned} |d(h,k)| &= \left|\frac{1}{2}r^2\cos^2 s + 2r^2\cos s\sin s + 2r^2\sin^2 s\right| e^{\theta h}e^{2\theta k} = \left|\frac{1}{2}\cos^2 s + 2\cos s\sin s + 2\sin^2 s\right| r^2e^{\theta h}e^{2\theta k} \\ &\le \left(\frac{1}{2}\left|\cos^2 s\right| + 2\left|\cos s\sin s\right| + 2\left|\sin^2 s\right|\right) r^2e^{\theta h}e^{2\theta k} \le \left(\frac{1}{2}+2+2\right) r^2e^{\theta h}e^{2\theta k} \end{aligned}$$

となるが，$0<\theta<1$ より $0 < e^{\theta h} < e^h, 0 < e^{2\theta k} < e^{2k}$ であり，$|h|<1, |k|<1$ とすると $|d(h,k)| \le \dfrac{9}{2}r^2e^3$ となる。よって

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k)\to(0,0)}|\varepsilon(h,k)| &= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\left|\frac{d(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \le \frac{9}{2}\lim_{r\to+0}\frac{r^2e^3}{\sqrt{r^2\cos^2 s + r^2\sin^2 s}} \\ &= \frac{9}{2}\lim_{r\to+0} re^3 = 0 \end{aligned}$$

よって求める 1 次式は $g(h,k) = 1+h+2k$ である。

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{3}}$ $z = x^3 + y^3, s = x + y, t = xy$ について次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{D(s,t)}{D(x,y)}$ を求めよ。

$$\frac{D(s,t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$$

(2) $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ を求めよ。

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \left(\frac{D(s,t)}{D(x,y)}\right)^{-1} = \frac{1}{x-y}\begin{pmatrix} x & -1 \\ -y & 1 \end{pmatrix}$$

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ を求めよ。

(2) より $\dfrac{\partial x}{\partial s} = \dfrac{x}{x-y}$, $\dfrac{\partial y}{\partial s} = -\dfrac{y}{x-y}$ である。

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = 3x^2\frac{x}{x-y} - 3y^2\frac{y}{x-y} = \frac{3(x^3-y^3)}{x-y} = 3(x^2+xy+y^2)$$

である。

$\boxed{\mathbf{4}}$ $z = f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}\left(2x^2+y^2\right)$ について次の問いに答えよ。

(1) $z = f(x,y)$ の臨界点 ($\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ かつ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ となる点) を求めよ。

$z_x = -2xe^{-(x^2+y^2)}(2x^2+y^2) + 4e^{-(x^2+y^2)}x = 2e^{-(x^2+y^2)}x\left(2-(2x^2+y^2)\right) = 0$ より $x = 0$ (a) または $2-(2x^2+y^2) = 0$ (b)。

$z_y = -2ye^{-(x^2+y^2)}(2x^2+y^2) + 2e^{-(x^2+y^2)}y = 2e^{-(x^2+y^2)}y\left(1-(2x^2+y^2)\right) = 0$ より $y = 0$ (c) または $1-(2x^2+y^2) = 0$ (d)。

(a) かつ (c) のとき $(x,y) = (0,0)$。

(a) かつ (d) のとき $1-(2x^2+y^2) = 0$ に $x = 0$ を代入すると，$y^2 = 1$。よって $(x,y) = (0,\pm 1)$。

(b) かつ (c) のとき $2-(2x^2+y^2) = 0$ に $y = 0$ を代入して $x^2 = 1$。よって $(x,y) = (\pm 1, 0)$

(b) かつ (d) のとき $2 = 2x^2+y^2 = 1$ より $1 = 2$ となり矛盾。この場合は解はない。

(2) $z = f(x,y)$ の極点を求めよ。

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2e^{-(x^2+y^2)}(-10x^2-y^2+4x^4+2x^2y^2+2) & 4xye^{-(x^2+y^2)}(2x^2+y^2-3) \\ 4xye^{-(x^2+y^2)}(2x^2+y^2-3) & 2e^{-(x^2+y^2)}(-2x^2-5y^2+4x^2y^2+2y^4+1) \end{vmatrix}$$

より

$$H(0,0) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

$$H(0,\pm 1) = \begin{vmatrix} \dfrac{2}{e} & 0 \\ 0 & -\dfrac{4}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8}{e^2} < 0$$

$$H(\pm 1,0) = \begin{vmatrix} -\dfrac{8}{e} & 0 \\ 0 & -\dfrac{2}{e} \end{vmatrix} = \frac{16}{e^2} > 0$$

よって極点は $(x,y) = (0,0), (1,0), (-1,0)$

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{5}$ 縦・横・高さの和が一定の直方体には体積最大なものが存在することを示し，その最大の体積を持つ直方体がどのようなものか求めよ。

直方体のたて・横・高さの長さをそれぞれ x, y, z とおく。辺の和が一定なので $x+y+z = \ell$ $(\ell > 0)$ とする。体積 V は $V = xyz = xy(\ell-x-y)$ である。辺の長さは 0 以上なので $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ とする。

よって $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq \ell \right\}$ 上で定義された関数 $V(x,y) = xy(\ell - x - y)$ の最大値が存在することを示し，その最大値を与える直方体を求めればよい。

D は有界閉集合であり，$V(x,y)$ は D で定義された連続関数なので最大値は存在する。またその最大値をとる点は境界上になるか，内部にあれば臨界点である。

D の境界 ∂D は

$$\partial D = \{ (x,y) \in D \mid x = 0 \} \cup \{ (x,y) \in D \mid y = 0 \} \cup \{ (x,y) \in D \mid x + y = \ell \}$$

であり境界上で $V(x,y) = 0$ である。

$V = xy\ell - x^2y - xy^2$ より $V_x = y\ell - 2xy - y^2, V_y = x\ell - x^2 - 2xy$ となる。

$V_x = y(\ell - 2x - y) = 0$ より $y = 0$ または $\ell - 2x - y = 0$ を得るが，$y = 0$ は境界上の点であり，すでに扱っているので $\ell - 2x - y = 0$ を考えればよい。

$V_y = x(\ell - x - 2y) = 0$ より $x = 0$ または $\ell - x - 2y = 0$ を得るが，$x = 0$ は境界上の点であり，すでに扱っているので $\ell - x - 2y = 0$ を考えればよい。以上により臨界点は $\ell - 2x - y = 0$ および $\ell - x - 2y = 0$ を満たす点であり，$x = y = \dfrac{\ell}{3}$ となる。$V\left(\dfrac{\ell}{3}, \dfrac{\ell}{3}\right) = \left(\dfrac{\ell}{3}\right)^3 > 0$ なので $x = y = \dfrac{\ell}{3}$ で最大になる。

よって最大値を与える点は $x = y = z = \dfrac{\ell}{3}$ であり，このとき直方体は立方体である。

$\boxed{6}$ 2 変数関数 $z = z(x,y)$ に対し $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくとき $\left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$ を $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を用いて表せ。

$x_r = \cos\theta, y_r = \sin\theta, x_\theta = -r\sin\theta, y_\theta = r\cos\theta$ なので

$$\begin{aligned} z_r &= z_x x_r + z_y y_r = z_x \cos\theta + z_y \sin\theta \\ z_\theta &= z_x x_\theta + z_y y_\theta = -z_x r\sin\theta + z_y r\cos\theta \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} (z_r)^2 + \left(\frac{1}{r} z_\theta\right)^2 &= (z_x\cos\theta + z_y\sin\theta)^2 + \left(\frac{1}{r}\left(-z_x r\sin\theta + z_y r\cos\theta\right)\right)^2 \\ &= (z_x)^2\cos^2\theta + 2z_xz_y\cos\theta\sin\theta + (z_y)^2\sin^2\theta + (z_x)^2\sin^2\theta - 2z_xz_y\sin\theta\cos\theta + (z_y)^2\cos^2\theta \\ &= (z_x)^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + (z_y)^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) \\ &= (z_x)^2 + (z_y)^2 \end{aligned}$$