解析学 I 第 1 回試験

2014–11–17　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 $y=\cos\left(x^4+x^2\right)\log\left(x^3+x\right)$ を微分せよ。$(\log x)'=\dfrac{1}{x}$，$(\cos x)'=-\sin x$ 等の諸公式を用いてよい。

$$y'=-(4x^3+2x)\sin\left(x^4+x^2\right)\log\left(x^3+x\right)+(3x^2+1)\cos\left(x^4+x^2\right)\frac{1}{x^3+x}$$

2 関数 $y=f(x)$ に対し $x=a+h$，$\varepsilon(h)=\dfrac{f(a+h)-(A+Bh+Ch^2)}{h^2}$ とおく。$\lim\limits_{h\to0}\varepsilon(h)=0$ が成立するとき $g(h)=A+Bh+Ch^2$ を $x=a$ で $y=f(x)=f(a+h)$ を近似する 2 次式という。
$y=f(x)=\sin x$ とする。$x=\dfrac{\pi}{6}$ で $y=f(x)=f\left(\dfrac{\pi}{6}+h\right)$ を近似する 2 次式を求めよ。ロピタルの定理を使用してもよい。

$\lim\limits_{h\to0}\varepsilon(h)h^2=0$ が成立している。

$$0=\lim_{h\to0}\varepsilon(h)h^2=\lim_{h\to0}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-(A+Bh+Ch^2)\right\}=\frac{1}{2}-A$$

$A=\dfrac{1}{2}$ である。$\lim\limits_{h\to0}\varepsilon(h)h=0$ より

$$0=\lim_{h\to0}\varepsilon(h)h=\lim_{h\to0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\left(\frac{1}{2}+Bh+Ch^2\right)}{h}=\lim_{h\to0}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-B-2Ch\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-B$$

$B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。なお途中でロピタルの定理を使用した。$\lim\limits_{h\to0}\varepsilon(h)=0$ より

$$\begin{aligned}
0&=\lim_{h\to0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}h+Ch^2\right)}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}h+Ch^2\right)\right)'}{(h^2)'}\qquad(h\text{ での微分})\\
&=\lim_{h\to0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}-2Ch}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}-2Ch\right)'}{(2h)'}\qquad(h\text{ での微分})\\
&=\lim_{h\to0}\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-2C}{2}=\frac{-\frac{1}{2}-2C}{2}
\end{aligned}$$

$C=-\dfrac{1}{4}$ である。
　よって求める 2 次式は

$$g(h)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}h-\frac{1}{4}h^2$$

である。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

$\boxed{3}$ 連続関数の定義を述べよ。また連続関数と連続関数の合成関数が連続であることを示せ。

関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で連続であるとは

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

が成立することをいう。定義域のすべての点で連続のとき，その関数を連続関数という。

連続関数 $y = f(x)$ と連続関数 $z = g(y)$ の合成関数を $z = g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$ を考える。連続ということは別の言い方をすると極限と可換ということなので $\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x)$, $\lim_{y\to b} g(y) = g(\lim_{y\to b} y)$ が成立している。

$$\lim_{x\to a} g \circ f(x) = \lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) = g\left(f\left(\lim_{x\to a} x\right)\right) = g\left(f\left(a\right)\right) = g \circ f(a) \tag{1}$$

定義域のすべての点で式 (1) が成立するので，$g \circ f$ は連続である。

$\boxed{4}$ テーラーの定理とは

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$

を満たす θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する，というものである。$R_n = \dfrac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ を剰余項と呼ぶ。

剰余項 R_n を切り捨て $f(x)$ の近似値として，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ を採用することにより近似計算をすることができる。このとき誤差の絶対値は $|R_n|$ である。

これを用いて $\sqrt{e}$ の近似計算を行いたい。$f(x) = e^x, a = 0$ としてこの方法を適用する。ただし，誤差の絶対値が 10^{-3} より小さくなるように n を決定し，その n を用いて近似値を計算をせよ。計算途中で $e < 3$ を使用してよい。

$f(x) = e^x$ なので $f^{(n)}(x) = e^x$ である。$c = a + \theta(x-a)$ とおく。$a = 0, x = \dfrac{1}{2}$ なので $c = a + \theta(x-a) = 0 + \theta\left(\dfrac{1}{2} - 0\right) = \dfrac{\theta}{2}$ であり，$0 < \theta < 1$ なので，$0 < c < \dfrac{1}{2}$ である。$y = e^x$ は単調増加関数なので $e^c \leqq e^{1/2} \leqq e \leqq 3$ が成立する。剰余項は

$$\left|R_n\right| = \left|\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n\right| = \frac{|e^c|}{n!}\left|x^n\right| \leq \frac{3}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

と評価できる。$\dfrac{3}{n!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n < 10^{-3}$ が成立すれば誤差は 10^{-3} より小さい。よって $\dfrac{n! \times 2^n}{3} > 1000$ を満たす n を求めればよい。$\dfrac{4! \times 2^4}{3} = 128$, $\dfrac{5! \times 2^5}{3} = 1280$ なので $n = 5$ である。$f^{(n)}(x) = e^x$ より

$$g(x) = \sum_{k=0}^{5-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$$

とおくと求める近似値は

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{211}{128}$$

である。

5 $y=f(x)=x^2\log x$ を $x=2$ でテーラー展開することを考える。次の問いに答えながら，テーラー展開を求めよ。

(1) $f'(x)$ および $f''(x)$，$f^{(3)}(x)$，$f^{(4)}(x)$ を求めよ。

$$f'(x)=2x\log x+x \qquad f''(x)=2\log x+3$$
$$f^{(3)}(x)=2x^{-1} \qquad f^{(4)}(x)=-2x^{-2}$$

(2) ある数以上の自然数 n に対し $f^{(n)}(x)$ を予想し，それが正しいことを数学的帰納法で証明せよ。

3 以上の自然数 n に対し $f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}2(n-3)!\,x^{-(n-2)}$ の成立を予想する。

$n=3$ のとき：
$$f^{(3)}(x)=2x^{-1}=(-1)^{3+1}2(3-3)!x^{-(3-2)}$$
より成立している。

$n=k$ のとき成立を仮定する。すなわち
$$f^{(k)}(x)=(-1)^{k+1}2(k-3)!x^{-(k-2)}$$
の成立を仮定する。

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x)&=\left(f^{(k)}(x)\right)'=\left((-1)^{k+1}2(k-3)!x^{-(k-2)}\right)'\\&=(-1)^{k+1}2(k-3)!(-(k-2))x^{-(k-2)-1}=(-1)^{k+1}2(k-3)!(-1)(k-2)x^{-(k-1)}\\&=(-1)^{(k+1)+1}2((k+1)-3)!x^{-((k+1)-2)}\end{aligned}$$

よって $n=k+1$ のときも成立する。3 以上の自然数 n についての成立が示された。

(3) $y=f(x)=x^2\log x$ を $x=2$ でテーラー展開せよ。

$$f(2)=4\log 2 \qquad f'(2)=4\log 2+2$$
$$f^{(2)}(2)=2\log 2+3 \qquad f^{(k)}(2)=(-1)^{k+1}2(k-3)!2^{-(k-2)}\quad(k\geq 3)$$

より

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\\&=4\log 2+(4\log 2+2)(x-2)+\frac{2\log 2+3}{2}(x-2)^2+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}2}{k(k-1)(k-2)2^{k-2}}(x-2)^k\\&=4\log 2+(4\log 2+2)(x-2)+\frac{2\log 2+3}{2}(x-2)^2+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k(k-1)(k-2)2^{k-3}}(x-2)^k\end{aligned}$$

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

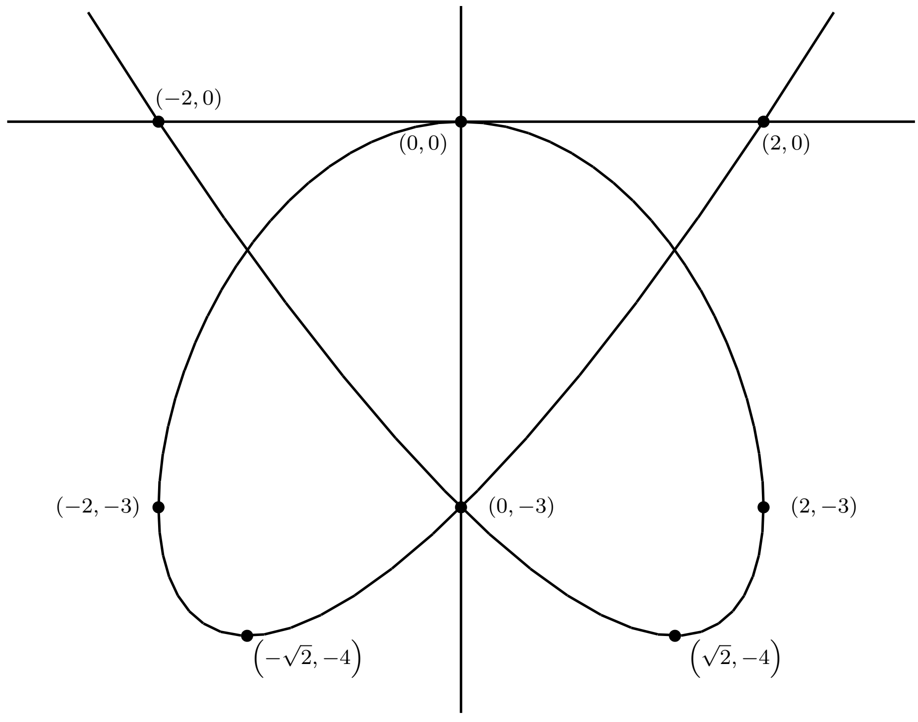
6 次の様にパラメータ表示された曲線の概形を書け。

$$x = x(t) = t^3 - 3t, \qquad y = y(t) = t^4 - 4t^2$$

$x'(t) = 3t^2 - 3, y'(t) = 4t^3 - 8t$ なので $x'(t) = 0$ を解くと，$3(t^2 - 1) = 0$ より $t = \pm 1$ を得る。$y'(t) = 0$ を解くと，$4t(t^2 - 2) = 0$ より $t = 0, \pm\sqrt{2}$ を得る。$x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために，途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

t		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$	
x'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	$\downarrow$		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	0	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\uparrow$
曲線	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\swarrow$	$\downarrow$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$

$x(0) = 0, x(\pm 1) = \mp 2, x(\pm\sqrt{2}) = \mp\sqrt{2}, y(0) = 0, y(\pm 1) = -3, y(\pm\sqrt{2}) = -4$ より $x'(t) = 0$ または $y'(t) = 0$ となる点は $(0, 0)$, $(\mp 2, -3)$，$\left(\mp\sqrt{2}, -4\right)$ である。$x(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm\sqrt{3}$ を得る。$y(0) = 0, y(\pm\sqrt{3}) = -3$ より y 軸との交点は $(0, 0), (0, -3)$ である。$y(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm 2$ を得る。$x(0) = 0, x(\pm 2) = \pm 2$ より x 軸との交点は $(0, 0), (\pm 2, 0)$ である。以上を考慮して曲線の概形を描くと次の様になる。



7 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (5)。