解析学 I 第 2 回試験

2015–1–19　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 関数 $z = f(x, y) = 1 + x + 2y + x^3y^2$ に対し次の問に答えよ。

(1) 導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + 3x^2y^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2 + 2x^3y$$

(2) $(x, y) = (0, 0)$ における $z = f(x, y)$ の接平面を求めよ。

ただし，(2) では $z = f(x, y)$ が $(x, y) = (0, 0)$ で全微分可能であることは仮定してよい。

$$z = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y = 1 + x + 2y$$

(3) $f(h, k)$ を $(0, 0)$ で近似する 1 次式 $g(h, k)$ を定義に基づいて求めよ。

$f(a+h, b+k)$ を (a, b) で近似する 1 次式 $g(h, k)$ とは，$g(h, k)$ が h, k に関する 1 次式であり，$\varepsilon(h, k) = \dfrac{f(a+h, b+k) - g(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ とおくとき $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$ が成立するものをいう。

$g(h, k) = 1+h+2k$ とおくと，

$$\varepsilon(h, k) = \frac{f(0 + h, 0 + k) - g(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{1 + h + 2k + h^3k^2 - (1 + h + 2k)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$
$$= \frac{h^3k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

となる。$h = r\cos\theta, k = r\sin\theta$ (ただし $r \geq 0$) とおくと，$(h, k) \to (0, 0)$ のとき $r \to +0$ となる。

$$\varepsilon(h, k) = \frac{(r\cos\theta)^3(r\sin\theta)^2}{\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}} = \frac{r^5\cos^3\theta\sin^2\theta}{r} = r^4\cos^3\theta\sin^2\theta$$

であり，$-1 \leq \cos\theta \leq 1, -1 \leq \sin\theta \leq 1$ より

$$-r^4 \leq \varepsilon(h, k) \leq r^4$$

となる。よって

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$$

となるので，求める式は

$$g(h, k) = 1 + h + 2k$$

である。

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ $z=x+y, s=x^2+y^2, t=xy$ について次の問に答えよ。

(1) $\dfrac{D(s,t)}{D(x,y)}$ を求めよ。

$$\frac{D(s,t)}{D(x,y)}=\begin{pmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$$

(2) $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ を求めよ。

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)}=\left(\frac{D(s,t)}{D(x,y)}\right)^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{x}{2\left(x^2-y^2\right)} & -\dfrac{y}{x^2-y^2} \\ -\dfrac{y}{2\left(x^2-y^2\right)} & \dfrac{x}{x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ を求めよ。

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=1, \dfrac{\partial z}{\partial y}=1$ より

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s}&=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=1\cdot\frac{x}{2(x^2-y^2)}+1\cdot\frac{-y}{2(x^2-y^2)}\\&=\frac{x-y}{2(x+y)(x-y)}=\frac{1}{2(x+y)}\end{aligned}$$

(4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}$ を求めよ。

$\dfrac{\partial z_s}{\partial x}=-\dfrac{1}{2(x+y)^2}, \dfrac{\partial z_s}{\partial y}=-\dfrac{1}{2(x+y)^2}$ より

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}&=\frac{\partial z_s}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z_s}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=-\frac{1}{2(x+y)^2}\frac{x}{2(x^2-y^2)}-\frac{1}{2(x+y)^2}\frac{-y}{2(x^2-y^2)}\\&=-\frac{(x-y)}{4(x+y)^2(x+y)(x-y)}=-\frac{1}{4(x+y)^3}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $z=f(x,y)=x^4+y^4+2x^2y^2-2y^2$ について次の問に答えよ。

(1) $z=f(x,y)$ の臨界点 ($\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$ かつ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ となる点) を求めよ。

$z_x=4x^3+4xy^2, z_y=4y^3+4x^2y-4y$ より連立方程式

$$x^3+xy^2=0 \tag{1}$$
$$y^3+x^2y-y=0 \tag{2}$$

の解が臨界点となる。式 (1) は $x(x^2+y^2)=0$ であるが,

$$x^2+y^2=0 \iff x=0 \text{ かつ } y=0$$

より (1) の解は $x=0$ となる。

これを (2) に代入すると

$$y^3-y=y(y-1)(y+1)$$

となり $y=\pm1,0$ を得る。よって臨界点は

$$(x,y)=(0,0),(0,-1),(0,1)$$

である。

(2) $z=f(x,y)$ の極点を求めよ。

$z_{xx}=12x^2+4y^2, z_{xy}=8xy, z_{yy}=12y^2+4x^2-4$ より

$$H(0,\pm1)=32>0, \quad H(0,0)=0$$

となる。よって $(0,\pm1)$ は極点であるが，$(0,0)$ はこれだけでは分からない。

$z=f(x,y)$ を x–軸に制限すると $z=f(x,0)=x^4$ となり，x–軸上では $x=0$ で極小になるので，$(0,0)$ の近くに $f(0,0)$ より大きな値を取る点が存在する。

y–軸上に制限すると $f(0,y)=y^4-2y^2$ でこの 4 次関数は y–軸上では $(0,0)$ で極大，即ちいくらでも近くに $f(0,0)$ より小さい値を取る点が存在する。2 つを合わせると $(0,0)$ が極点でないことが分かる。

以上により求める極点は $(0,1),(0,-1)$ である。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 点 $(x,y)=\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ の周りで $x^3-3xy+y^3=0$ によって定まる陰関数を $y=f(x)$ とするとき，$\dfrac{df}{dx}$ を求めよ。また $\dfrac{df}{dx}\left(\dfrac{3}{2}\right)$ を求めよ。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-y}{x-y^2}, \qquad \frac{df}{dx}\left(\frac{3}{2}\right)=-1$$

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{5}}$ $D = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leqq 2, -2 \leq y \leqq 2\,\}$ 上で定義された関数 $z = f(x,y) = (x+1)^2 + (y+1)^2$ に最大値が存在するならば、それを求めよ。

D は有界閉集合であり，$f(x,y)$ は連続なので最大値が存在する。その点は境界上にあるか，内部の臨界点である。
臨界点を求める。$f_x = 2(x+1), f_y = 2(y+1)$ なので臨界点は $(x,y) = (-1,-1)$ である。臨界点での値は

$$f(-1,-1) = 0$$

である。
$L_1 = \{\,(x,2) \mid -2 \leqq x \leqq 2\,\}$，$L_2 = \{\,(x,-2) \mid -2 \leqq x \leqq 2\,\}$，$L_3 = \{\,(2,y) \mid -2 \leqq y \leqq 2\,\}$，$L_4 = \{\,(-2,y) \mid -2 \leqq y \leqq 2\,\}$ とおくと

$$\partial D = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$$

である。
L_1 では $y = 2$ なので $f(x,y) = f(x,2) = (x+1)^2 + 3^2$ である。$-2 \leqq x \leqq 2$ より L_1 上では $x = 2$ のとき最大であり，$f(2,2) = 18$ である。
L_2 では $y = -2$ なので $f(x,y) = f(x,-2) = (x+1)^2 + 1^2$ である。$-2 \leqq x \leqq 2$ より L_2 上では $x = 2$ のとき最大であり，$f(2,-2) = 10$ である。
L_3 では $x = 2$ なので $f(x,y) = f(2,y) = 3^2 + (y+1)^2$ である。$-2 \leqq y \leqq 2$ より L_3 上では $y = 2$ のとき最大であり，$f(2,2) = 18$ である。
L_4 では $x = -2$ なので $f(x,y) = f(-2,y) = 1^2 + (y+1)^2$ である。$-2 \leqq y \leqq 2$ より L_4 上では $y = 2$ のとき最大であり，$f(-2,2) = 10$ である。
以上により境界上では $(x,y) = (2,2)$ のとき最大値 $f(2,2) = 18$ をとる。
よって最大値は $f(2,2) = 18$ である。

$\boxed{\mathbf{6}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (5)。