解析学 I 第 3 回試験

2015–2–17　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 次の問に答えよ。(問題は次ページに続く)

(1) $y = \dfrac{2x^4+8x^3+20x^2+25x+19}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}$ を部分分数展開せよ。

$f(x) = (x^2+2x+3)^2(x+1), g(x) = 2x^4+8x^3+20x^2+25x+19$ とおくと，定数 A と 3 次以下の関数 $g_1(x)$ を用いて

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g_1(x)}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{A}{x+1}$$

と部分分数展開できる。これを通分することにより

$$g(x) = g_1(x)(x+1) + A(x^2+2x+3)^2 \tag{1}$$

が恒等的に成り立つ。(1) に $x=-1$ を代入すると

$$8 = g(-1) = g_1(-1)(-1+1) + A\left((-1)^2+2(-1)+3\right)^2 = 4A$$

より $A=2$ を得る。

$$\begin{aligned}\frac{g_1(x)}{(x^2+2x+3)^2} &= \frac{g(x)}{f(x)} - \frac{2}{x+1} = \frac{2x^4+8x^3+20x^2+25x+19-2(x^2+2x+3)^2}{f(x)} \\ &= \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} = \frac{1}{(x^2+2x+3)^2}\end{aligned}$$

より

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{2}{x+1}$$

(2) $J_2 = \displaystyle\int \frac{1}{(t^2+2)^2}\,dt$, $J_1 = \displaystyle\int \frac{1}{(t^2+2)}\,dt$ とする。$\dfrac{1}{t^2+2} = \dfrac{t^2+2}{(t^2+2)^2} = \dfrac{t^2}{(t^2+2)^2} + \dfrac{2}{(t^2+2)^2}$ の両辺を積分することにより $J_2 = \dfrac{t}{4(t^2+2)} + \dfrac{1}{4}J_1$ を導け。

両辺を積分すると

$$J_1 = \int \frac{t^2}{(t^2+2)^2}\,dt + 2J_2 \quad \text{であり，また}$$

$$\int \frac{t^2}{(t^2+2)^2}\,dt = \int t\left(-\frac{1}{2(t^2+2)}\right)'\,dt = -\frac{t}{2(t^2+2)} - \int\left(-\frac{1}{2(t^2+2)}\right)dt = -\frac{t}{2(t^2+2)} + \frac{1}{2}J_1$$

より $J_1 = -\dfrac{t}{2(t^2+2)} + \dfrac{1}{2}J_1 + 2J_2$ となり，これより求める式が得られる。

別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

(3) $I=\displaystyle\int \frac{2x^4+8x^3+20x^2+25x+19}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}\,dx$ を求めよ。$\displaystyle\int \frac{1}{t^2+1}\,dt=\arctan t$ を使用してもよい。

$t=x+1$ とおき，(2) の漸化式を用いると

$$\int \frac{1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx=\int \frac{1}{(t^2+2)^2}\,dt=\frac{t}{4(t^2+2)}+\frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+2}\,dt$$

となる。$t=\sqrt{2}u$ とおくと $\dfrac{dt}{du}=\sqrt{2}$ より

$$\int \frac{1}{t^2+2}\,dt=\int \frac{1}{2u^2+2}\sqrt{2}\,du=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{u^2+1}\,du=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan u=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}I&=\int \frac{1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx+\int \frac{2}{x+1}\,dx=\frac{t}{4(t^2+2)}+\frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+2}\,dt+\int \frac{2}{x+1}\,dx\\&=\frac{x+1}{4(x^2+2x+3)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+2\log|x+1|\end{aligned}$$

2 不定積分

$$I=\int \frac{1}{\cos x}\,dx$$

を次にしたがって求めよ。$t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおく。

(1) $\dfrac{dt}{dx}$ を t を用いて表せ。

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2}=\frac{1+t^2}{2}$$

(2) $\cos x=\cos 2\left(\dfrac{x}{2}\right)$ と見ることにより，$\cos x$ を t を用いて表せ。

$$\cos x=\cos 2\left(\frac{x}{2}\right)=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

(3) 不定積分 I を求めよ。

$$\begin{aligned}I&=\int \frac{1}{\cos x}\,dx=\int \frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int \frac{2}{1-t^2}\,dt\\&=\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt=-\log|1-t|+\log|1+t|\\&=\log\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|-\log\left|1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の問に答えよ。(問題は次ページに続く)

(1) 微分方程式

$$y'' - 2y' + 3y = 0 \qquad (*)$$

の複素数値関数としての一般解を求めよ。解く方法は何でもよいが，演算子法を用いるときは

$$D - \lambda = e^{\lambda x} D e^{-\lambda x}$$

が役に立つかもしれない。

$\alpha = 1 + i\sqrt{2}, \beta = 1 - i\sqrt{2}$ とおくと演算子は

$$D^2 - 2D + 3 = (D - \alpha)(D - \beta)$$

と分解できる。

微分方程式 $(*)$ は

$$(D - \alpha)(D - \beta)y = 0$$

となる。$u = (D - \beta)y$ とおき $(D - \alpha)u = 0$ を解く。

演算子の間の関係式 $D - \lambda = e^{\lambda x} D e^{-\lambda x}$ を用いて微分方程式を変形すると

$$e^{\alpha x} D e^{-\alpha x} u = 0$$

となる。

$v = e^{-\alpha x} u$ とおき，微分方程式の両辺に左から $e^{-\alpha x}$ をかけると

$$Dv = 0$$

となるので積分により

$$v = C_1$$

となり,

$$u = ve^{\alpha x} = C_1 e^{\alpha x}$$

が得られる。

これを $(D - \beta)y = u$ に代入すると微分方程式

$$(D - \beta)y = C_1 e^{\alpha x}$$

が得られる。

微分方程式を演算子の間の関係式を用いて変形すると

$$e^{\beta x} D e^{-\beta x} y = C_1 e^{\alpha x}$$

となる。$z = e^{-\beta x} y$ とおき，両辺に $e^{-\beta x}$ をかけると

$$Dz = C_1 e^{(\alpha - \beta)x}$$

となる。これを積分すると

$$z = \frac{C_1}{\alpha - \beta} e^{(\alpha - \beta)x} + C_2$$

$\dfrac{C_1}{\alpha - \beta}$ を C_1 でおき直すと

$$y = C_1 e^{(1+i\sqrt{2})x} + C_2 e^{(1-i\sqrt{2})x}$$

が得られる。

別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

(2) (1) で求めた複素数値関数としての一般解を実数値関数の形に変形せよ。

オイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{1}$$

を用いると

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} &= e^{(1+i\sqrt{2})x} = e^x e^{i\sqrt{2}x} = e^x \left(\cos\sqrt{2}x + i\sin\sqrt{2}x\right) \\ e^{\beta x} &= e^{(1-i\sqrt{2})x} = e^x e^{-i\sqrt{2}x} = e^x \left(\cos\sqrt{2}x - i\sin\sqrt{2}x\right) \end{aligned}$$

より (1) で求めた解は

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{(1+i\sqrt{2})x} + C_2 e^{(1-i\sqrt{2})x} \\ &= C_1 e^x \left(\cos\sqrt{2}x + i\sin\sqrt{2}x\right) + C_2 e^x \left(\cos\sqrt{2}x - i\sin\sqrt{2}x\right) \\ &= (C_1 + C_2)\, e^x \cos\sqrt{2}x + (iC_1 - iC_2)\, e^x \sin\sqrt{2}x \end{aligned}$$

と書ける。$A_1 = C_1 + C_2, A_2 = iC_1 - iC_2$ とおくと

$$y = A_1 e^x \cos\sqrt{2}x + A_2 e^x \sin\sqrt{2}x \tag{2}$$

が得られる。

(3) 微分方程式

$$y'' - 2y' + 3y = 3x^3 - 6x^2 + 9x - 2 \qquad (**)$$

の複素数値関数としての一般解を求めよ。ただし，(1) の微分方程式 $(*)$ の一般解は既知としてよい。また

「$(**)$ の一般解」=「$(**)$ の特殊解」+「$(*)$ の一般解」

も既知としてよい。

$(**)$ の特殊解を $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ として a, b, c, d を決定する。$y' = 3ax^2 + 2bx + c, y'' = 6ax + 2b$ なので

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + 3y &= (6ax + 2b) - 2\left(3ax^2 + 2bx + c\right) + 3\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) \\ &= 3ax^3 + (3b - 6a)x^2 + (3c - 4b + 6a)x + (3d - 2c + 2b) \\ &= 3x^3 - 6x^2 + 9x - 2 \end{aligned}$$

より $a = 1, b = 0, c = 1, d = 0$ となる。$y = x^3 + x$ は $(**)$ の解関数である。よって $(**)$ の一般解は

$$y = x^3 + x + C_1 e^{(1+i\sqrt{2})x} + C_2 e^{(1-i\sqrt{2})x}$$

4 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (5)。