解析学 I 第 1 回試験

2015–11–30　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

$\boxed{1}$ $y = \sin\left(x^5 + x^3\right) e^{\left(x^4+x\right)}$ を微分せよ。$(\sin x)' = \cos x$, $(e^x)' = e^x$ 等の諸公式を用いてよい。

$$(5x^4 + 3x^2)\cos\left(x^5 + x^3\right) e^{\left(x^4+x\right)} + (4x^3+1)\sin\left(x^5+x^3\right) e^{\left(x^4+x\right)}$$

$\boxed{2}$ 関数 $y = f(x)$ に対し $x = a + h$, $\varepsilon(h) = \dfrac{f(a+h) - (A + Bh + Ch^2)}{h^2}$ とおく。$\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ が成立するとき $g(h) = A + Bh + Ch^2$ を $x = a$ で $y = f(x) = f(a+h)$ を近似する 2 次式という。
$y = f(x) = \cos x$ とする。$x = \dfrac{\pi}{4}$ で $y = f(x) = f\left(\dfrac{\pi}{4} + h\right)$ を近似する 2 次式を定義に基づいて求めよ。ロピタルの定理を使用してもよい。

$\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h)h^2 = 0$ が成立するので

$$0 = \lim_{h\to 0}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + h\right) - (A + Bh + Ch^2)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - A$$

より $A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる。

$\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h)h = 0$ が成立するので

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + Bh + Ch^2\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right) - B - 2Ch\right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} - B \end{aligned}$$

より $B = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる。

$\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ が成立するので

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}h + Ch^2\right)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} - 2Ch}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right) - 2C}{2} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}} - 2C}{2} \end{aligned}$$

より $C = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ となる。よって求める 2 次式は

$$g(h) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}h - \frac{1}{2\sqrt{2}}h^2$$

である。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{3}}$ 積の微分法 $[(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]$ を証明せよ。

$\Delta = \dfrac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$ とおく

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\end{aligned}$$

であり，微分可能な関数は連続なので

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))' &= \lim_{h\to 0} \Delta = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\end{aligned}$$

を得る。

$\boxed{\mathbf{4}}$ テーラーの定理とは

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$

を満たす θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する，というものである。$R_n = \dfrac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ を剰余項と呼ぶ。

剰余項 R_n を切り捨て $f(x)$ の近似値として，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ を採用することにより近似計算をすることができる。このとき誤差の絶対値は $|R_n|$ である。

これを用いて $\cos \dfrac{3\pi}{16}$ の近似計算を行いたい。$f(x) = \cos x, a = \dfrac{\pi}{4}$ としてこの方法を適用する。ただし，誤差の絶対値が 10^{-2} より小さくなるように n を決定し，その n を用いて近似値を計算せよ。近似値の中の π はそのままでよい。また計算途中で $\pi < 4$ を使用してよい。

$f(x) = \cos x$ のとき $f^{(n)}(x)$ は $\pm\cos x, \pm\sin x$ のどれかなので任意の x に対し $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ が成立する。

$c = a + \theta(x-a)$ とおく。$x = \dfrac{3\pi}{16}, a = \dfrac{\pi}{4}$ と考えると剰余項は

$$\begin{aligned}|R_n| &= \left|\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n\right| = \frac{|f^{(n)}(c)|}{n!}|x-a|^n \leq \frac{1}{n!}\left|\frac{3\pi}{16} - \frac{\pi}{4}\right|^n \\ &= \frac{1}{n!}\left(\frac{\pi}{16}\right)^n \leq \frac{1}{n!}\left(\frac{4}{16}\right)^n = \frac{1}{4^n n!}\end{aligned}$$

となる。これが 10^{-2} よりも小さければよい。

$n = 3$ のとき

$$\frac{1}{4^3 3!} = \frac{1}{384} < 10^{-2}$$

となるので $n = 3$ として近似値を計算する。$a = \dfrac{\pi}{4}, x = \dfrac{3\pi}{16}$ とする。$h = x - a = -\dfrac{\pi}{16}$ より

$$\begin{aligned}\cos\frac{3\pi}{16} &= f\left(\frac{3\pi}{16}\right) \fallingdotseq f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right)h + \frac{1}{2!}f''\left(\frac{\pi}{4}\right)h^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{16} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{16}\right)^2\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $y = f(x) = x^3 \log x$ を $x = 1$ でテーラー展開することを考える。次の問いに答えながら，テーラー展開を求めよ。

(1) $f'(x)$ および $f''(x)$，$f^{(3)}(x)$，$f^{(4)}(x)$ を求めよ。

$$f'(x) = 3x^2 \log x + x^2 \qquad f''(x) = 6x \log x + 5x$$

$$f^{(3)}(x) = 6 \log x + 11 \qquad f^{(4)}(x) = 6x^{-1}$$

(2) ある数以上の自然数 n に対し $f^{(n)}(x)$ を予想し，それが正しいことを数学的帰納法で証明せよ。

$n \geq 4$ に対して $f^{(n)}(x) = (-1)^n 6(n-4)!\, x^{-(n-3)}$ が成立すると予想される。

$n = 4$ のとき

$$f^{(4)}(x) = 6x^{-1} = (-1)^4 6(4-4)!\, x^{-(4-3)}$$

となり成立している。

$n = k$ のとき成立を仮定する。

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left((-1)^k 6(k-4)!\, x^{-(k-3)}\right)' \\ &= (-1)^k 6(k-4)!(-(k-3))x^{-(k-3)-1} \\ &= (-1)^{k+1} 6\big((k+1)-4\big)!\, x^{-((k+1)-3)} \end{aligned}$$

となり $n = k+1$ でも成立しているので，予想が正しいことが証明された。

(3) $y = f(x) = x^3 \log x$ を $x = 1$ でテーラー展開せよ。

$$f(1) = 1^3 \log 1 = 0 \qquad f'(1) = 1$$

$$f''(1) = 5 \qquad f^{(3)}(1) = 11$$

$k \geq 4$ のとき $f^{(k)}(1) = (-1)^k 6(k-4)!$ である。

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k \\ &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k \\ &= (x-1) + \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{11}{6}(x-1)^3 + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-1)^k 6}{k(k-1)(k-2)(k-3)}(x-1)^k \end{aligned}$$

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

6 関数 $y = x^3 \log x$ の凹凸および変曲点を調べグラフの概形を書け。

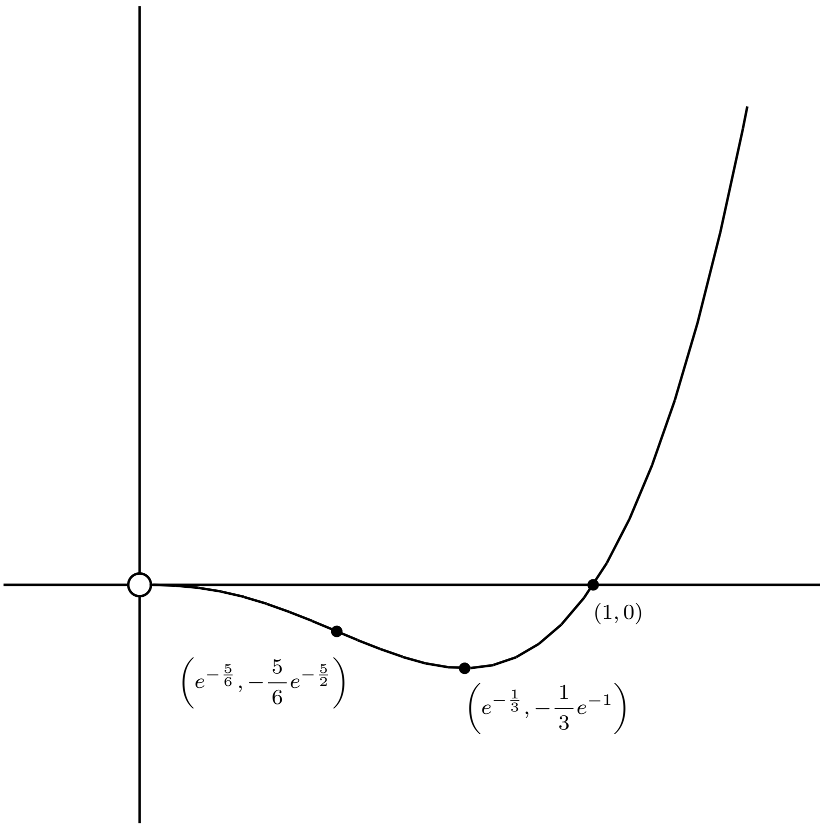
$f(x) = x^3 \log x$ とおく。$\log x$ が定義されるのは $x > 0$ なので $f(x)$ の定義域も $x > 0$ である。$f'(x) = 3x^2 \log x + x^2$，$f''(x) = 6x \log x + 5x$ となる。$f'(x) = 0$ を解いて $x = e^{-\frac{1}{3}}$ を得る。また $f''(x) = 0$ を解いて $x = e^{-\frac{5}{6}}$ を得る。間の正負を調べることにより，増減表は次の様になることが分かる。

x		$e^{-\frac{5}{6}}$		$e^{-\frac{1}{3}}$	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{5}{6}e^{-\frac{5}{2}}$	↘	$-\frac{1}{3}e^{-1}$	↗

よって変曲点は $\left(e^{-\frac{5}{6}}, -\frac{5}{6}e^{-\frac{5}{2}}\right)$ であり，区間 $\left(0, e^{-\frac{5}{6}}\right)$ で上に凸，区間 $\left(e^{-\frac{5}{6}}, \infty\right)$ で下に凸になる。

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} \frac{\log x}{\dfrac{1}{x^3}} = \lim_{x \to +0} \frac{(\log x)'}{\left(\dfrac{1}{x^3}\right)'} = \lim_{x \to +0} \frac{\dfrac{1}{x}}{-3\dfrac{1}{x^4}} = -\lim_{x \to +0} \frac{x^3}{3} = 0$$

であり，$f(x) = 0$ の解が $x = 1$ であることに注意するとグラフの概形は下のようになる。



7 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (5)。