解析学 I 第 2 回試験

2016–1–25　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 関数 $z = f(x, y) = x + 2y + xy \sin(xy)$ に対し次の問に答えよ。

(1) 導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + y\sin(xy) + xy^2\cos(xy)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2 + x\sin(xy) + x^2 y\cos(xy)$$

(2) $(x, y) = (0, 0)$ における $z = f(x, y)$ の接平面を求めよ。
ただし，(2) では $z = f(x, y)$ が $(x, y) = (0, 0)$ で全微分可能であることは仮定してよい。

$f_x(0, 0) = 1, f_y(0, 0) = 2$ より

$$z = f_x(0,0)x + f_y(0,0)y = x + 2y$$

(3) $f(h, k)$ を $(0, 0)$ で近似する 1 次式 $g(h, k)$ を定義に基づいて求めよ。

$f(a+h, b+k)$ を (a, b) で近似する 1 次式 $g(h, k)$ とは，$g(h, k)$ が h, k に関する 1 次式であり，$\varepsilon(h,k) = \dfrac{f(a+h, b+k) - g(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ とおくとき $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$ が成立するものをいう。

(2) より $g(h, k) = h + 2k$ と予想される。この $g(h, k)$ に対し $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$ を示せばよい。

$$\varepsilon(h,k) = \frac{f(h,k) - g(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h + 2k + hk\sin(hk) - (h+2k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{hk\sin(hk)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$h = r\cos\theta, k = r\sin\theta$ $(r \geq 0)$ と極座標で表す。$(h, k) \to (0, 0)$ と $r \to 0$ は同値である。ただし $r \to 0$ のとき θ は不定である。
$|\sin(hk)| \leq 1, |\cos\theta| \leq 1, |\sin\theta| \leq 1$ より

$$|\varepsilon(h,k)| = \left|\frac{hk\sin(hk)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq \left|\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| = \left|\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}}\right|$$
$$= \frac{r^2|\cos\theta|\cdot|\sin\theta|}{\sqrt{r^2}} \leq r$$

よって $r \to +0$ のとき $\varepsilon(h, k) \to 0$ となる。ゆえに $g(h, k) = h + 2k$ である。

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ $z = x^3 + y^3, s = x + y, t = xy$ について次の問に答えよ。

(1) $\dfrac{D(s,t)}{D(x,y)}$ を求めよ。

$$\frac{D(s,t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$$

(2) $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ を求めよ。

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \left(\frac{D(s,t)}{D(x,y)}\right)^{-1} = \frac{1}{x-y}\begin{pmatrix} x & -1 \\ -y & 1 \end{pmatrix}$$

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ を求めよ。

$$\begin{aligned} z_s &= z_x x_s + z_y y_s = 3x^2 \frac{x}{x-y} + 3y^2 \frac{-y}{x-y} = \frac{3(x^3 - y^3)}{x-y} \\ &= \frac{3(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x-y} = 3(x^2+xy+y^2) \end{aligned}$$

(4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}$ を求めよ。

$$\begin{aligned} z_{ss} &= (z_s)_x x_s + (z_s)_y y_s = 3(2x+y)\frac{x}{x-y} + 3(x+2y)\frac{-y}{x-y} \\ &= \frac{6(x^2-y^2)}{x-y} = \frac{6(x-y)(x+y)}{x-y} = 6(x+y) \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 領域 D で微分可能な関数 $z = f(x,y)$ が D の内部の点 (a,b) で最大値をとる。このとき (a,b) は $z = f(x,y)$ の臨界点であることを示せ。

h の絶対値が十分小さいとき $(a+h,b) \in D$ であり，k の絶対値が十分小さいとき $(a,b+k) \in D$ である。$f(x,y)$ は (a,b) で最大値をとるので

$$f(a+h,b) \le f(a,b), \quad f(a,b+k) \le f(a,b)$$

が成立している。$h > 0$ のとき $\dfrac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} \le 0$ なので

$$f_x^+(a,b) = \lim_{h\to+0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \le 0$$

であり，$h < 0$ のとき $\dfrac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} \ge 0$ なので

$$f_x^-(a,b) = \lim_{h\to-0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \ge 0$$

である。$f_x(a,b) = f_x^+(a,b) = f_x^-(a,b)$ より $f_x(a,b) = 0$ となる。y に関しても同様に議論すると $f_y(a,b) = 0$ を得る。よって (a,b) は $f(x,y)$ の臨界点である。

$\boxed{\mathbf{4}}$ $z = f(x, y) = x^3 + 2xy^2 - 3x^2 - 3y^2 - 1$ について次の問に答えよ。

(1) $z = f(x, y)$ の臨界点 ($\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ かつ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ となる点) を求めよ。

$$z_x = 3x^2 + 2y^2 - 6x, \quad z_y = 4xy - 6y$$

なので $z_y = 0$ より $y(2x - 3) = 0$ となるので，$y = 0$ または $2x - 3 = 0$ となる。$y = 0$ のとき

$$z_x(x, 0) = 3x^2 + 2 \cdot 0^2 - 6x = 3x^2 - 6x = 0$$

を得る。よって $y = 0$ のときは $x = 0$ または $x = 2$ である。

$x = \dfrac{3}{2}$ のとき

$$z_x\left(\frac{3}{2}, y\right) = 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2y^2 - 6 \cdot \frac{3}{2} = 0$$

を得る。よって $y = \pm\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ である。以上により臨界点は

$$(x, y) = (0, 0), \quad (2, 0), \quad \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right), \quad \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

である。

(2) $z = f(x, y)$ の極点を求めよ。

$$z_{xx} = 6x - 6, \quad z_{xy} = 4y, \quad z_{yy} = 4x - 6$$

なので

$$H(x, y) = 12(x - 1)(2x - 3) - 16y^2$$

となる。よって

$$H(0, 0) = 36 > 0, H(2, 0) = 12 > 0, H\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -18 < 0, H\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -18 < 0$$

となる。よって極値を与える (x, y) は $(0, 0)$ と $(2, 0)$ である。$z_{xx}(0, 0) = -6 < 0$，$z_{xx}(2, 0) = 6 > 0$ なので $(0, 0)$ では極大，$(2, 0)$ では極小である。

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{5}}$ $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2 \right\}$ 上で定義された関数 $z = f(x, y) = x^2 + 2x - 2xy$ に最大値が存在するならば、それを求めよ。

D は有界閉集合であり，$z = f(x, y)$ は連続関数なので最大値は存在する。最大値は境界上の点であるか，内部の点である。内部の点の場合臨界点である。よって境界上の点での最大値と臨界点の値の大きい方が最大値である。

臨界点を求める。$z_y = -2x = 0$ より $x = 0$ である。$z_x = 2x + 2 - 2y = 0$ より $y = 1$，よって臨界点は $(0, 1)$ である。$z(0, 1) = 0$ である。

$E_1 = \left\{ (x, 2) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2 \right\}$，$E_2 = \left\{ (x, -2) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2 \right\}$，$F_1 = \left\{ (2, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq y \leq 2 \right\}$，$F_2 = \left\{ (-2, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq y \leq 2 \right\}$ とおく。D の境界は

$$\partial D = E_1 \cup E_2 \cup F_1 \cup F_2$$

である。

E_1 での $f(x, y)$ の値は $f(x, 2)$ なので

$$f(x, 2) = x^2 + 2x - 4x = x^2 - 2x$$

の最大値は $f(-2, 2) = 8$ である。

E_2 での $f(x, y)$ の値は $f(x, -2)$ なので

$$f(x, -2) = x^2 + 2x + 4x = x^2 + 6x$$

の最大値は $f(2, -2) = 16$ である。

F_1 での $f(x, y)$ の値は $f(2, y)$ なので

$$f(2, y) = 2^2 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2y = 8 - 4y$$

の最大値は $f(2, -2) = 16$ である。

F_2 での $f(x, y)$ の値は $f(-2, y)$ なので

$$f(-2, y) = (-2)^2 + 2(-2) - 2(-2)y = 4y$$

の最大値は $f(-2, 2) = 8$ である。

臨界点での値は 0 であり，境界での最大値は 16 である。よって D における最大値は 16 である。

$\boxed{\mathbf{6}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (5)。