解析学 I 第 3 回試験

2016–2–15　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 次の問に答えよ。(問題は次ページに続く)

(1) $y = \dfrac{5x^3+10x-5}{(x^2+4)(x^2-1)}$ を部分分数分解せよ

$f(x) = (x^2+4)(x^2-1), g(x) = 5x^3+10x-5$ とおくと，1 次以下の関数 $g_1(x), g_2(x)$ を用いて

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g_1(x)}{x^2+4} + \frac{g_2(x)}{x^2-1}$$

と部分分数展開できる。これを通分することにより

$$g(x) = g_1(x)(x^2-1) + g_2(x)(x^2+4) \tag{1}$$

が恒等的に成り立つ。(1) に $x=1$ を代入すると

$$10 = g(1) = g_1(1)(1^2-1) + g_2(1)\left(1^2+4\right) = 5g_2(1)$$

であり，(1) に $x=-1$ を代入すると

$$-20 = g(-1) = g_1(-1)((-1)^2-1) + g_2(-1)\left((-1)^2+4\right) = 5g_2(-1)$$

である。$g_2(x) = ax+b$ とすると，$a=3, b=-1$ を得る。

$$\begin{aligned}\frac{g_1(x)}{x^2+4} &= \frac{g(x)}{f(x)} - \frac{3x-1}{x^2-1} = \frac{5x^3+10x-5-(3x-1)(x^2+4)}{f(x)}\\ &= \frac{(2x+1)(x^2-1)}{(x^2+4)(x^2-1)} = \frac{2x+1}{(x^2+4)}\end{aligned}$$

より

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{2x+1}{x^2+4} + \frac{3x-1}{x^2-1} = \frac{2x+1}{x^2+4} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1}$$

(2) (1) で求めた部分分数を通分せよ。

$$\frac{2x+1}{x^2+4} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{5x^3+10x-5}{(x^2+4)(x^2-1)}$$

(3) $J = \displaystyle\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$ を求めよ。ただし $\displaystyle\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan t$ を使用してもよい。

$x = 2t$ とおくと $\dfrac{dx}{dt} = 2$ より

$$\begin{aligned}J &= \int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{1}{4t^2+4}\frac{dx}{dt}\,dt = \int \frac{1}{4}\frac{1}{t^2+1}2\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt\\ &= \frac{1}{2}\arctan t = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\end{aligned}$$

別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

(4) $I = \displaystyle\int \frac{5x^3+10x-5}{(x^2+4)(x^2-1)}\,dx$ を求めよ。

$\dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{2x}{x^2+4} + \dfrac{1}{x^2+4} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x+1}$ となる。$t = x^2+4$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx} = 2x$ なので

$$\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \int \frac{2x}{t}\frac{1}{2x}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| = \log(x^2+4)$$

となる。よって

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2x}{x^2+4}\,dx + \int \frac{1}{x^2+4}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{2}{x+1}\,dx \\ &= \log(x^2+4) + \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + \log|x-1| + 2\log|x+1| \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ 不定積分

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$$

を次にしたがって求めよ。$\sqrt{x^2-4} = t - x$ とおく。

(1) x を t を用いて表せ。

両辺を 2 乗すると $x^2-4 = t^2-2tx+x^2$ なので，これを整理すると

$$x = \frac{t^2+4}{2t}$$

(2) $\dfrac{dx}{dt}$ を t を用いて表せ。

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t^2-4}{2t^2}$$

(3) 不定積分 I を求めよ。

$\sqrt{x^2-4} = t - x = t - \dfrac{t^2+4}{2t} = \dfrac{t^2-4}{2t}$ なので

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx = \int \frac{2t}{t^2-4}\frac{t^2-4}{2t^2}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| = \log\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の問に答えよ。(問題は次ページに続く)

(1) 微分方程式

$$y'' - 4y' + 3y = 0 \qquad (*)$$

の一般解を求めよ。解く方法は何でもよいが，演算子法を用いるときは

$$D - \lambda = e^{\lambda x} D e^{-\lambda x}$$

が役に立つかもしれない。

演算子は

$$D^2 - 4D + 3 = (D-3)(D-1)$$

と分解できるので，微分方程式 $(*)$ は

$$(D-3)(D-1)y = 0$$

となる。$u = (D-1)y$ とおき $(D-3)u = 0$ を解く。

演算子の間の関係式 $D - 3 = e^{3x} D e^{-3x}$ を用いて微分方程式を変形すると

$$e^{3x} D e^{-3x} u = 0$$

となる。

$v = e^{-3x} u$ とおき，微分方程式の両辺に左から e^{-3x} をかけると

$$Dv = 0$$

となるので積分により $v = C_1$ となり，

$$u = ve^{3x} = C_1 e^{3x}$$

が得られる。

これを $(D-1)y = u$ に代入すると微分方程式

$$(D-1)y = C_1 e^{3x}$$

が得られる。

微分方程式を演算子の間の関係式を用いて変形すると

$$e^x D e^{-x} y = C_1 e^{3x}$$

となる。$z = e^{-x} y$ とおき，両辺に e^{-x} をかけると

$$Dz = C_1 e^{2x}$$

となる。これを積分すると

$$z = \frac{C_1}{2} e^{2x} + C_2$$

$\dfrac{C_1}{2}$ を C_1 でおき直すと

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x$$

が得られる。

(2) (1) で求めた関数が実際微分方程式 $(*)$ を満たすことを確認せよ。

$y' = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^x, y'' = 9C_1 e^{3x} + C_2 e^x$ より

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 3y &= (9C_1 e^{3x} + C_2 e^x) - 4(3C_1 e^{3x} + C_2 e^x) + 3(C_1 e^{3x} + C_2 e^x) \\ &= (9 - 12 + 3)C_1 e^{3x} + (1 - 4 + 3)C_2 e^x = 0 \end{aligned}$$

別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

(3) 微分方程式

$$y'' - 4y' + 3y = 3x^2 - 5x - 2 \qquad (**)$$

の一般解を求めよ。ただし，(1) の微分方程式 $(*)$ の一般解は既知としてよい。また

「$(**)$ の一般解」=「$(**)$ の特殊解」+「$(*)$ の一般解」

も既知としてよい。

$(**)$ の特殊解を $y = ax^2 + bx + c$ として a, b, c を決定する。$y' = 2ax + b, y'' = 2a$ なので

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 3y &= 2a - 4\left(2ax + b\right) + 3\left(ax^2 + bx + c\right) \\ &= 3ax^2 + (3b - 8a)x + (3c - 4b + 2a) \\ &= 3x^2 - 5x - 2 \end{aligned}$$

より $a = 1, b = 1, c = 0$ となる。$y = x^2 + x$ は $(**)$ の解関数である。よって $(**)$ の一般解は

$$y = x^2 + x + C_1 e^{3x} + C_2 e^x$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ D を微分演算子，a を定数，$f(x)$ を関数とし，$L = D + a$ とする。微分方程式

$$Ly = f(x) \qquad (1)$$

の一般解が微分方程式

$$Ly = 0 \qquad (2)$$

の一般解と，微分方程式 (1) の特殊解の和で表されることを示せ。

y_1 を (1) の特殊解とし，y を (1) の一般解とする。$y_2 = y - y_1$ とおく。

$$\begin{aligned} Ly_2 &= L(y - y_1) = (D + a)(y - y_1) = D(y - y_1) + a(y - y_1) \\ &= Dy - Dy_1 + ay - ay_1 = Dy + ay - (Dy_1 + ay_1) \\ &= L(y) - L(y_1) = f(x) - f(x) = 0 \end{aligned}$$

となるので，y_2 は微分方程式 (2) の解関数である。

$y = y_1 + y_2$ となるので，和で表されることが分かる。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (5)。