解析学 I 第 1 回試験

2016–11–14　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 $y = \sin\left(x^7 + x^3\right)\log\left(x^6 + x^2\right)$ を微分せよ。$(\sin x)' = \cos x$，$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ 等の諸公式を用いてよい。

$$(7x^6 + 3x^2)\cos\left(x^7 + x^3\right)\log\left(x^6 + x^2\right) + \sin\left(x^7 + x^3\right)\frac{6x^5 + 2x}{x^6 + x^2}$$

2 関数 $y = f(x)$ に対し $x = a + h$，$\varepsilon(h) = \dfrac{f(a+h) - (A + Bh + Ch^2)}{h^2}$ とおく。$\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$ が成立するとき $g(h) = A + Bh + Ch^2$ を $x = a$ で $y = f(x) = f(a+h)$ を近似する 2 次式という。
$y = f(x) = \log x$ とする。$x = 1$ で $y = f(x) = f(1+h)$ を近似する 2 次式を定義に基づいて求めよ。ロピタルの定理を使用してもよい。

$\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)h^2 = 0$ が成立するので

$$0 = \lim_{h\to 0}\left(\log(1+h) - (A + Bh + Ch^2)\right) = 0 - A$$

より $A = 0$ となる。
$\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)h = 0$ が成立するので

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h) - \left(0 + Bh + Ch^2\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{1+h} - B - 2Ch\right) \\ &= 1 - B \end{aligned}$$

より $B = 1$ となる。
$\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$ が成立するので

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h) - \left(h + Ch^2\right)}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+h} - 1 - 2Ch}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-\dfrac{1}{(1+h)^2} - 2C}{2} = \frac{-1 - 2C}{2} \end{aligned}$$

より $C = -\dfrac{1}{2}$ となる。よって求める 2 次式は

$$g(h) = h - \frac{1}{2}h^2$$

である。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

3 以下に書かれているのはテーラーの定理から「関数 $y = f(x)$ の n 次導関数が連続で，$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$，$f^{(n)}(a) > 0$ かつ n が偶数のとき $y = f(x)$ は $x = a$ で極小である」を導く証明の最初の部分である。文章を続けて証明を完成させよ。

[証明] $f^{(n)}(a) > 0$ と $y = f^{(n)}(x)$ が連続なことから，ある $\delta > 0$ が存在して $|t - a| < \delta$ となる任意の t に対し $f^{(n)}(t) > 0$ が成立する。x を $0 < |x - a| < \delta$ を満たす任意の実数とする。

テーラーの定理より

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \tag{1}$$

を満たす θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する。$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ なので式 (1) は

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{k!}(x-a)^n$$

となる。n が偶数なので $(x-a)^n > 0$ であり，$f^{(n)}(a+\theta(x-a)) > 0$ より $f(x) - f(a) > 0$ となる。よって $y = f(x)$ は $x = a$ で極小である。

4 テーラーの定理とは

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$

を満たす θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する，というものである。$R_n = \dfrac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ を剰余項と呼ぶ。

剰余項 R_n を切り捨て $f(x)$ の近似値として，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ を採用することにより近似計算をすることができる。このとき誤差の絶対値は $|R_n|$ である。

これを用いて $e^{\frac{1}{3}}$ の近似計算を行いたい。$f(x) = e^x, a = 0$ としてこの方法を適用する。ただし，誤差の絶対値が 2×10^{-4} より小さくなるように n を決定し，その n を用いて近似値を計算せよ。ただし計算途中で $e < 3$ を使用してよい。

$f(x) = e^x$ のとき任意の自然数に対し $f^{(n)}(x) = e^x$ となる。

$c = a + \theta(x-a)$ とする。$x = \dfrac{1}{3}, a = 0$ と考えると剰余項は

$$|R_n| = \left|\frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n\right| = \frac{e^c}{n!}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

である。$0 < c < \dfrac{1}{3} < 1$ より

$$0 < 1 = e^0 < e^c < e^{\frac{1}{3}} < e^1 = e < 3$$

となる。よって

$$|R_n| = \frac{e^c}{n!}\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq \frac{3}{n!}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{n! \cdot 3^{n-1}}$$

となる。これが 2×10^{-4} よりも小さければよい。

$n = 5$ のとき

$$\frac{1}{5!3^4} = \frac{1}{9720} < \frac{1}{5000} = 2 \times 10^{-4}$$

となるので $n = 5$ として近似値を計算する。$a = 0, x = \dfrac{1}{3}$ とする。$h = x - a = \dfrac{1}{3}$ より

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{3}} &= f\left(\frac{1}{3}\right) \fallingdotseq f(0) + f'(0)\frac{1}{3} + \frac{1}{2!}f''(0)\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(0)\left(\frac{1}{3}\right)^4 \\ &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{2713}{1944} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $y = f(x) = xe^{5x}$ を $x = 2$ でテーラー展開することを考える。次の問に答えながら，テーラー展開を求めよ。

(1) $f'(x)$ および $f''(x)$，$f^{(3)}(x)$，$f^{(4)}(x)$ を求めよ。

$$f'(x) = e^{5x} + 5xe^{5x} \qquad f''(x) = 5 \cdot 2e^{5x} + 5^2xe^{5x}$$

$$f^{(3)}(x) = 5^2 \cdot 3e^{5x} + 5^3xe^{5x} \qquad f^{(4)}(x) = 5^3 \cdot 4e^{5x} + 5^4xe^{5x}$$

(2) 0 以上の整数 n に対し $f^{(n)}(x)$ を予想し，それが正しいことを数学的帰納法で証明せよ。

$n \geq 0$ に対して $f^{(n)}(x) = 5^{n-1} \cdot ne^{5x} + 5^n xe^{5x}$ が成立すると予想される。

$n = 0$ のとき

$$f^{(0)}(x) = f(x) = xe^{5x} = 5^{0-1} \cdot 0e^{5x} + 5^0xe^{5x}$$

となり成立している。

$n = k$ のとき成立を仮定する。

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left(5^{k-1} \cdot ke^{5x} + 5^kxe^{5x}\right)' \\ &= 5^kke^{5x} + 5^ke^{5x} + 5 \cdot 5^kxe^{5x} \\ &= 5^{(k+1)-1} \cdot (k+1)e^{5x} + 5^{k+1}xe^{5x} \end{aligned}$$

となり $n = k + 1$ でも成立しているので，予想が正しいことが証明された。

(3) $y = f(x) = xe^{5x}$ を $x = 2$ でテーラー展開せよ。

$f^{(k)}(2) = 5^{k-1}ke^{5\cdot 2} + 5^k \cdot 2e^{5\cdot 2} = 5^{k-1}(k+10)e^{10}$ より

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(2)}{k!}(x-2)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^{k-1}(k+10)e^{10}}{k!}(x-2)^k \end{aligned}$$

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

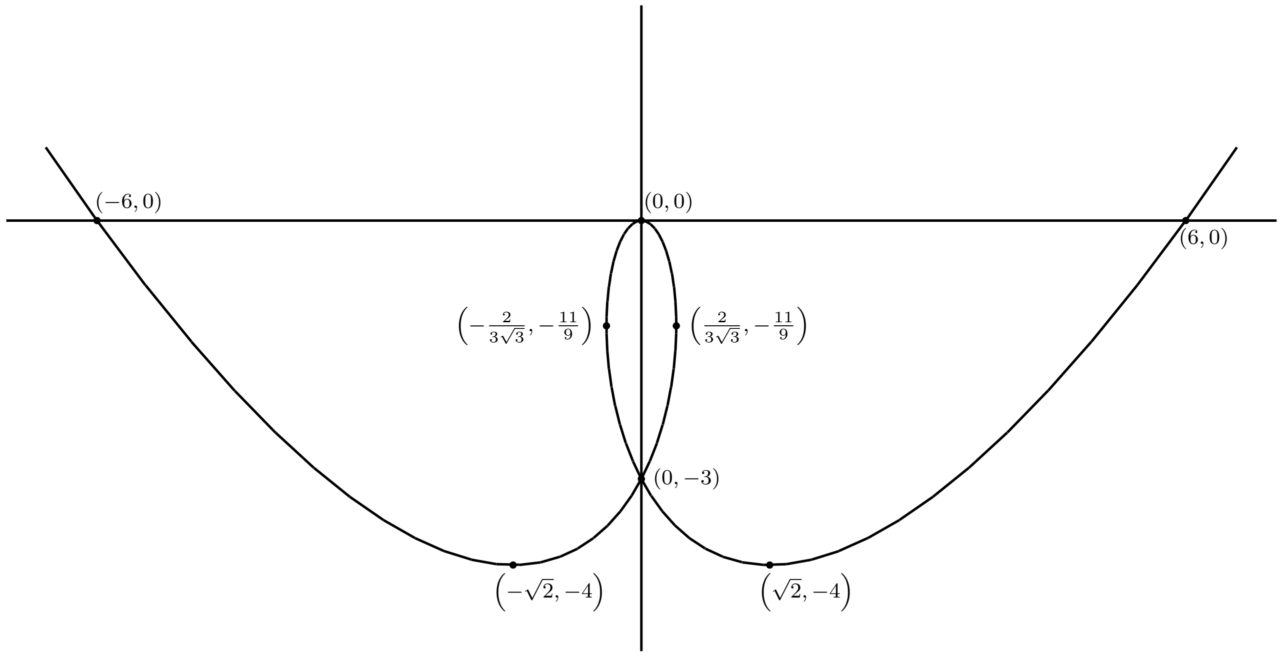
$\boxed{\mathbf{6}}$ 次の様にパラメータ表示された曲線の概形を書け。

$$x = x(t) = t^3 - t, \qquad y = y(t) = t^4 - 4t^2$$

$x'(t) = 3t^2 - 1, y'(t) = 4t^3 - 8t$ なので $x'(t) = 0$ を解くと，$t^2 - \dfrac{1}{3} = 0$ より $t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を得る。$y'(t) = 0$ を解くと，$t(t^2 - 2) = 0$ より $t = 0, \pm\sqrt{2}$ を得る。$x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために，途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

t		$-\sqrt{2}$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\sqrt{2}$	
x'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	$\downarrow$		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	0	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\uparrow$
曲線	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\swarrow$	$\downarrow$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$

$x'(t) = 0$ または $y'(t) = 0$ となる点は $(x(0), y(0)) = (0, 0)$, $\left(x\left(\sqrt{2}\right), y\left(\sqrt{2}\right)\right) = \left(\sqrt{2}, -4\right)$, $\left(x\left(-\sqrt{2}\right), y\left(-\sqrt{2}\right)\right) = \left(-\sqrt{2}, -4\right)$, $\left(x\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}, -\frac{11}{9}\right)$, $\left(x\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}, -\frac{11}{9}\right)$ である。$x(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm 1$ を得る。$y(0) = 0, y(\pm 1) = -3$ より y 軸との交点は $(0, 0), (0, -3)$ である。$y(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm 2$ を得る。$x(0) = 0, x(\pm 2) = \pm 6$ より x 軸との交点は $(0, 0), (\pm 6, 0)$ である。以上を考慮して曲線の概形を描くと次の様になる。



$\boxed{\mathbf{7}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (5)。