# 解析学 I 第 2 回試験

2017–1–16　　河野

**注意**：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。

・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。

・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

**1** 関数 $z = f(x,y) = 1 + 2x + 3y + 4x\sin y$ に対し次の問に答えよ。

(1) 導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 + 4\sin y \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3 + 4x\cos y$$

(2) $(x,y) = (0,0)$ における $z = f(x,y)$ の接平面を求めよ。

ただし，(2) では $z = f(x,y)$ が $(x,y) = (0,0)$ で全微分可能であることは仮定してよい。

$$z = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y = 1 + 2x + 3y$$

(3) $f(h,k)$ を $(0,0)$ で近似する 1 次式 $g(h,k)$ を定義に基づいて求めよ。

$f(a+h, b+k)$ を $(a,b)$ で近似する 1 次式 $g(h,k)$ とは，$g(h,k)$ が $h,k$ に関する 1 次式であり，$\varepsilon(h,k) = \dfrac{f(a+h,b+k) - g(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ とおくとき $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$ が成立するものをいう。

$g(h,k) = 1 + 2h + 3k$ と予想できる。

$$\varepsilon(h,k) = \frac{f(0+h,0+k) - g(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{1+2h+3k+4h\sin k - (1+2h+3k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{4h\sin k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

ここで $h = r\cos\theta, k = r\sin\theta$ とおくと $(h,k)\to(0,0)$ のとき $r \to +0$ であり

$$\frac{1}{4}\varepsilon(h,k) = \frac{r\cos\theta\sin(r\sin\theta)}{r} = \cos\theta\sin(r\sin\theta) = \cos\theta\frac{\sin(r\sin\theta)}{r\sin\theta}r\sin\theta$$

となる。

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left|\varepsilon(h,k)\right| &= \lim_{r\to+0} 4\left|\cos\theta\frac{\sin(r\sin\theta)}{r\sin\theta}r\sin\theta\right| = 4\lim_{r\to+0}|\cos\theta|\left|\frac{\sin(r\sin\theta)}{r\sin\theta}\right| r\,|\sin\theta| \\ &\le 4\lim_{r\to+0}\left|\frac{\sin(r\sin\theta)}{r\sin\theta}\right| r = 0\end{aligned}$$

より $g(h,k) = 1 + 2h + 3k$ が求めるものである。

**裏にも問題有り。別紙にも問題あり**

| 学科 | | 在籍番号 | | 氏名 | |
|---|---|---|---|---|---|

**2** $z=x^4+y^4, s=xy, t=x+y$ について次の問に答えよ。

**(1)** $\dfrac{D(s,t)}{D(x,y)}$ を求めよ。

$$\frac{D(s,t)}{D(x,y)}=\begin{pmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**(2)** $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ を求めよ。

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)}=\left(\frac{D(s,t)}{D(x,y)}\right)^{-1}=\frac{1}{y-x}\begin{pmatrix} 1 & -x \\ -1 & y \end{pmatrix}$$

**(3)** $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ を求めよ。

$$z_s=z_x x_s+z_y y_s=4x^3\frac{1}{y-x}+4y^3\frac{-1}{y-x}=4\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{y-x}=-4(x^2+xy+y^2)$$

**(4)** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t\partial s}$ を求めよ。

$$\begin{aligned} z_{st}=(z_s)_t=(z_s)_x x_t+(z_s)_y y_t&=-4(2x+y)\frac{-x}{y-x}-4(x+2y)\frac{y}{y-x} \\ &=-4\frac{-2x^2-xy+xy+2y^2}{y-x}=-4\frac{2(y-x)(y+x)}{y-x}=-8(x+y) \end{aligned}$$

**3** $w=x^3+y^3+z^3, s=x+y+z, t=xy+yz+zx, u=xyz$ とするとき $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ を求めよ。ただし $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q+r & r+p & p+q \\ qr & rp & pq \end{pmatrix}^{-1}=$ $\begin{pmatrix} \dfrac{p^2}{(p-q)(p-r)} & -\dfrac{p}{(p-q)(p-r)} & \dfrac{1}{(p-q)(p-r)} \\ \dfrac{q^2}{(q-r)(q-p)} & -\dfrac{q}{(q-r)(q-p)} & \dfrac{1}{(q-r)(q-p)} \\ \dfrac{r^2}{(r-p)(r-q)} & -\dfrac{r}{(r-p)(r-q)} & \dfrac{1}{(r-p)(r-q)} \end{pmatrix}$ は既知としてよい。

$\dfrac{D(s,t,u)}{D(x,y,z)}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & z+x & x+y \\ yz & zx & xy \end{pmatrix}$ より逆行列を用いると

$$x_s=\frac{x^2}{(x-y)(x-z)} \qquad y_s=\frac{y^2}{(y-z)(y-x)} \qquad z_s=\frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$$

なので

$$\frac{\partial w}{\partial s}=w_x x_s+w_y y_s+w_z z_s=\frac{3x^4}{(x-y)(x-z)}+\frac{3y^4}{(y-z)(y-x)}+\frac{3z^4}{(z-x)(z-y)}$$

となる。

$\boxed{\mathbf{4}}$ $z = f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ について次の問に答えよ。

(1) $z = f(x,y)$ の臨界点 ($\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ かつ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ となる点) を求めよ。

$$z_x = 4x^3 - 4x + 4y, \quad z_y = 4y^3 + 4x - 4y$$

なので $z_x = 0$ と $z_y = 0$ を加えて 4 で割ると

$$0 = x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

を得る。よって $x + y = 0$ または $x^2 - xy + y^2 = 0$ が成立する。$x^2 - xy + y^2 = 0$ が成立しているときは $x^2 - xy + y^2 = \left(x - \dfrac{1}{2}y\right)^2 + \dfrac{3}{4}y^2 = 0$ より $x = 0, y = 0$ となるので $x + y = 0$ の場合のみ考えればよい。

$$\begin{aligned} 0 = z_x(x,-x) &= 4x^3 - 4x - 4x = 4(x^3 - 2x) \\ &= 4x(x^2 - 2) = 4x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

より $x = 0$ または $x = \sqrt{2}$ または $x = -\sqrt{2}$ となる。以上により臨界点は

$$(x,y) = (0,0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

である。

(2) $z = f(x,y)$ の極点を求めよ。

$$z_{xx} = 12x^2 - 4, \quad z_{xy} = 4, \quad z_{yy} = 12y^2 - 4$$

なので

$$H(x,y) = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 16(3x^2 - 1)(3y^2 - 1) - 16$$

となる。よって

$$H(0,0) = 0, \quad H(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 384 > 0$$

となる。$z_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = z_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) > 0$ なので $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ で極小である。

$(x,y) = (0,0)$ が極点かどうかを調べる。

$f(x,y)$ を $x$ 軸に制限して $g(x) = f(x,0) = x^4 - 2x^2$ とする。$g'(x) = 4x^3 - 4x, g''(x) = 12x^2 - 4$ より $g'(0) = 0, g''(0) = -4 < 0$ となるので $g(x)$ は $x = 0$ で極大である。$(0,0)$ の十分近くに $f(x,0) < f(0,0)$ となる点が存在する。

次に $y = x$ 上での $z$ の動きを見よう。$h(x) = z(x,x)$ とおくと $h(x) = 2x^4$ となるので $x = 0$ で極小である。よって $(0,0)$ の十分近くの点 $(x,y)$ で，$f(x,y) > f(0,0)$ となる点がある。

十分近くに $z(0,0)$ より大きい点も小さい点もあるので，$z$ は $(0,0)$ で極値をとらない。

以上により $(x,y) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ および $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ で極小値をとる。

**裏にも問題有り。別紙にも問題あり**

| 学科 | | 在番籍号 | | 氏名 | |
|---|---|---|---|---|---|

$\boxed{\mathbf{5}}$ 定円に内接する三角形の中で面積最大のものが存在するかどうか調べ，存在すればそれを求めよ。

定円を点 $O$ を中心とする半径 $r$ の円とする。円に内接する 3 角形を $ABC$ とする。角 $\angle AOB = x, \angle BOC = y, \angle COA = z$ とおくと $x + y + z = 2\pi$ が成立している。このとき $ABC$ が 3 角形をなす条件は $0 < x < 2\pi, 0 < y < 2\pi, 0 < z < 2\pi$ である。この不等式が定義する領域を $D$ とすると $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x, 0 < y, x + y < 2\pi \right\}$ となる。

3 角形 $ABC$ の面積 $S$ は

$$S = \frac{1}{2} r^2 \left( \sin x + \sin y + \sin(2\pi - x - y) \right)$$

なので，$\overline{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, 0 \leq y, x + y \leq 2\pi \right\}$ 上で

$$w = f(x, y) = \frac{1}{2} r^2 \left( \sin x + \sin y + \sin(2\pi - x - y) \right)$$

の最大値を求める問題を考える。

$\overline{D}$ は有界閉集合であり，$f(x, y)$ は $\overline{D}$ 上の連続関数なので最大値が存在する。境界上または内部の点が最大値を与える。内部の点の場合最大値を与える点は臨界点である。

最初に境界上での関数の値を考える。$L_1 = \left\{ (x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2\pi \right\}$，$L_2 = \left\{ (0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2\pi \right\}$，$L_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2\pi, x + y = 2\pi \right\}$ とおくと $\partial \overline{D} = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ である。$L_1$ 上で $w$ は $w = f(x, 0) = \frac{1}{2} r^2 \left( \sin x + \sin 0 + \sin(2\pi - x) \right) = 0$，$L_2$ 上では $w = f(0, y) = \frac{1}{2} r^2 \left( \sin 0 + \sin y + \sin(2\pi - y) \right) = 0$，$L_3$ 上では $y = 2\pi - x$ なので
$w = f(x, 2\pi - x) = \frac{1}{2} r^2 \left( \sin x + \sin\left(2\pi - x\right) + \sin(2\pi - x - (2\pi - x)) \right) = \frac{1}{2} r^2 \left( \sin x + \sin(2\pi - x) \right) = 0$ 以上により境界上では $w = 0$ である。

次に内部の臨界点を調べる。

$$z_x = \frac{1}{2} r^2 \left( \cos x - \cos(2\pi - x - y) \right), \qquad z_y = \frac{1}{2} r^2 \left( \cos y - \cos(2\pi - x - y) \right)$$

なので臨界点では $\cos x - \cos(2\pi - x - y) = 0$ かつ $\cos y - \cos(2\pi - x - y) = 0$ が成立している。これより $\cos x = \cos y$ が得られる。$0 \leq x \leq 2\pi$ かつ $0 \leq y \leq 2\pi$ なので，この範囲で考えると，$x = y$ または $x + y = 2\pi$ が成立する。$x + y = 2\pi$ は境界なので $x = y$ としてよい。これを代入すると $\cos x = \cos(2\pi - 2x)$ が得られる。前と同様にして $x = 2\pi - 2x$ または $x + (2\pi - 2x) = 2\pi$ が成立する。後者の場合 $x = 0$ となり，境界なので $x = 2\pi - 2x$ となる。よって $x = y = \frac{2\pi}{3}$ となる。

$$f\left( \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} r^2 > 0$$

なので $f$ は $(x, y) = \left( \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right)$ で最大値をとる。$x = y = z = \frac{2\pi}{3}$ なので最大になる 3 角形は正 3 角形である。

$\boxed{\mathbf{6}}$ 次の式が与えられているとき，$x, y$ を独立変数，$z$ を従属変数と見て $z_x, z_y, z_{xy}$ を求めよ。

$$x^2 + 2xy + y^2 + z^2 = 1$$

式を $x$ および $y$ で微分すると

$$2x + 2y + 2zz_x = 0 \tag{1}$$
$$2x + 2y + 2zz_y = 0 \tag{2}$$

式 (1) を $y$ で微分すると

$$2 + 2z_y z_x + 2zz_{xy} = 0$$

これを整理すると

$$z_x = -\frac{x + y}{z} \qquad z_y = -\frac{x + y}{z}$$
$$z_{xy} = -\frac{z_x z_y + 1}{z} = -\frac{(x + y)^2 + z^2}{z^3}$$